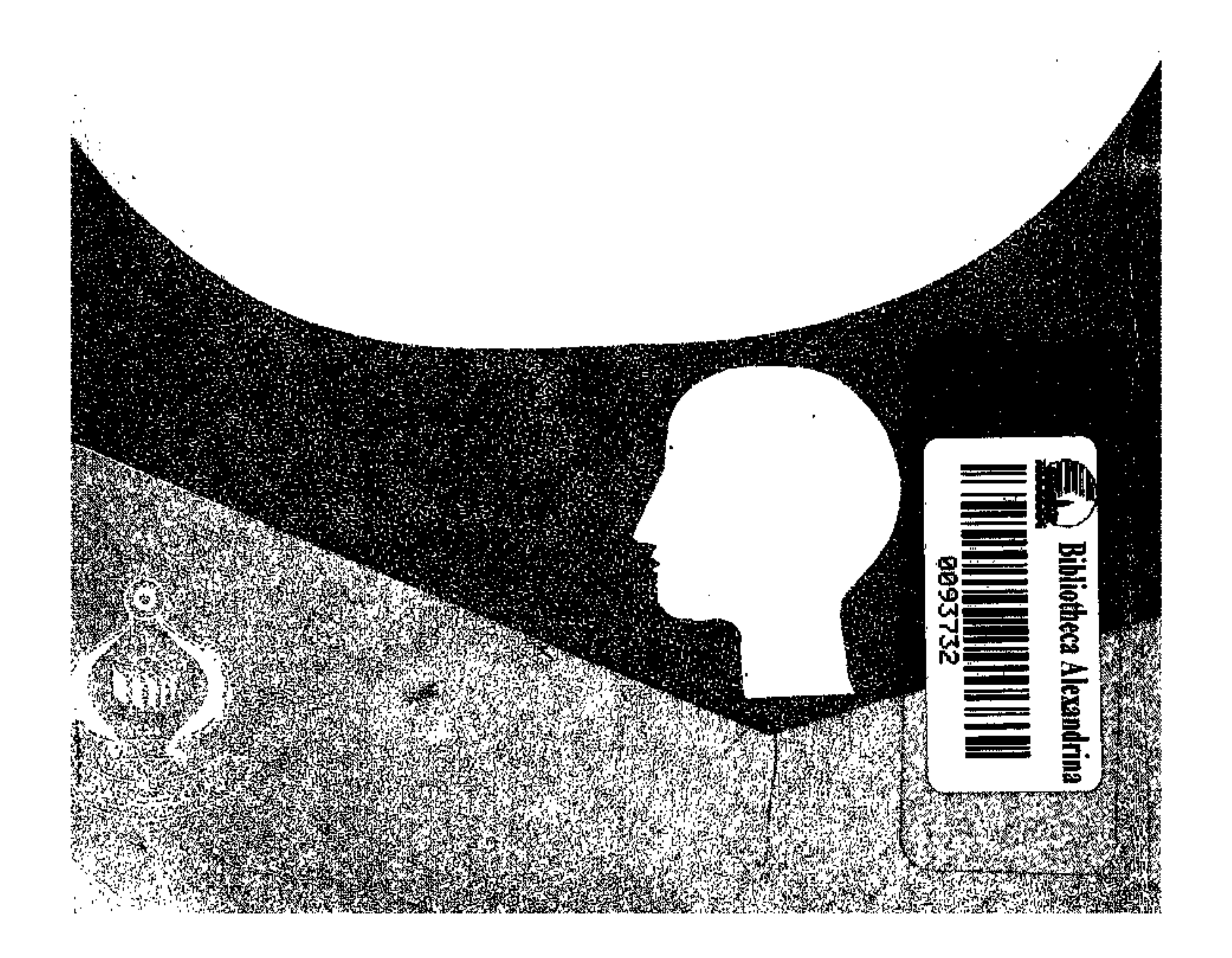
الإحصاء النفسى

الدكتور السيد محمد خيرى




محمد خطاب

الإحصاء النفسى



تأليف

الدكتور السيد محمد خيرى

أستاذ ورئيس قسم علم النفس

كلية التربية - جامعة الرياض

١٤١٧هـ / ١٩٩٧م

ملتزم الطبع والنشر

دار الفكر العربى

الإدارة ٩٤ شارع عباس العقاد - مدينة نصر

ت ٢٧٥٢٧٩٤ - ٢٧٥٢٩٨٤



١٨٢ , ١٥٠ السيد محمد خيرى.

س ى إح الإحصاء النفسى / تأليف السيد محمد خيرى . ـ القاهرة :

دار الفكر العربى، ١٩٩٧ .

٣١٢ ص : إيض ؛ ٢٤سم.

يشتمل على إرجاعات ببليوجرافية وحواشى.

تدمك ٩٧٧/١٠/٠٩٠٧/٩

١ ـ علم النفس ـ الطرق الإحصائية. أ ـ العنوان.

بسم الله الرحمن الرحيم

قال تعالى " وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا "

صدق الله العظيم



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمـــة :

القياس هو الأسلوب العلمي الذي يحول الأوصاف اللفظية الى ابعاد محددة وهو الأسلوب الذي يطور العلوم ويدفع بها نحو الموضوعية .

والعلوم الانسانية لا زالت علوما متطورة ، فقد كانت فرعا من الفلسفة وكـــان الفيلسوف يعتمد على الجدل المنطقي . وعندما تدخلت الأساليب العلمية في بحوث هذه العلوم اعتمدت بادىء ذي بدء على الحالات الفردية والخبرات الخاصة ، ولكن هذه العلوم ما لبثت ان اتخذت دراسة الانسان بوجه عام وعلاقاته بغيره وتأثره بما حوله وتأثيره فيه أساسا للدراسة ، واقتضى ذلك منه أساليب يضبط بها جمع الحقائق التي يتوصل بها . وأساليب أخرى يعالج بها ما يجمعه من حقائق بغية التوصل الى ما يستطيع أن يستخلصه من نتائج .

ولهذا كان الباحث الانساني محتاجا دائما الى الأساليب الاحصائية يضبط بها بحوثه ويستنتج عن طريقها نتائجه .

وان كنا نقدم اليوم كتابا للاحصاء لطالب كلية التربية فما ذلك الا لأننا نؤمن أن خريج هذه الكلية لا بد وأن يكون باحثا علميا قبل كل شيء ، مادته الانسان وسلوكه وأدواته الضبط وتحويل الملاحظات الى كميات تقاس وتقارن عن طريق فنـــون الاحصـــاء .

وقد حاولنا في هذا الكتاب تبسيط المادة للطالب حتى تكون مستساغة لديه يتقبلها بتفهم وميل ويستخدمها باستساغة واتقان وقد اقتصرنا في هذا الكتاب على الموضوعات الأساسية التي لا يستغني عنها طالب علم النفس أو التربية أو الباحث فيهما .

ولعلنا نكون بذلك قد أسهمنا في تطوير هذه العلوم وتقدمها وفي تطوير البحوث الانسانية بعامة في وطننا العربي .

والله ولي التوفيق ، ، ،



الباب الأول

تصنيف البيانـــات وتمثيلها بالرسم

* القياس في علوم الانسان .
* التوزيع التكراري .
* تمثيل التوزيع بالرسم .

المضلع التكراري

المدرج التكراري

المنحنى التكراري

المنحنى التكراري التجمعي

خاتمة في التمثيل بالرسم



القياس في علوم الانسان :

يقصد بالقياس تحديد درجة امتلاك شيء أو شخص لصفة من الصفات وتبعا لهذا المعنى فان الفرد يحتاج الى القياس في جميع تصرفاته اليومية ، ويستعمل القياس في كل حالة يتسنى فيها الوصف بالأرقام ، ويدخل ضمن القياس العد والترتيب ترتيبا تصاعديا أو تنازليا بالنسبة لخاصية معينة أو صفة خاصة ، فتستطيع أن ترتب عددا من الأشخاص من حيث الطول أو الوزن أو المستوى الاقتصادي أو الذكرة .. الخ طالما أن هذه الصفات الجسمية أو الاجتماعية أو النفسية يمكن أن تختلف من فرد لآخر من الناحية الكمية . وترتيب الأشخاص أو – الأشياء يفيد كثيرا في مقارنتها بعضها بعض ، بل ويفيد أيضا في بيان مركز الفرد بالنسبة لمجموعته ، فاذا كان ترتيب (أ) الثاني في مجموعته البالغ عددها عشرة أشخاص ، أمكن أن نقول أن هناك فردا واحدا يفضله في الناحية التي اتخذت أساسا للترتيب ، بينما هناك ثمانية غيره متأخرون عنه فيها . ولكن طريقة ترتيب الأفراد لا تفيد أكثر من ذلك ، فهي لا تدل على مقدار امتلاك الشخص للصفة المطلوبة الا بدرجة نسبية ، أي أنها لا تدلنا مثلا على مدى تفوق الأول على الثاني ، كما لا يمكن أن نستنتج من الترتيب أن الفرق بين الثاني والأول يعادل الفرق بين السادس والخامس ، بالرغم من أن الفرق في الرتب متساو في الحالتين . فالرتب لا تخضع للعمليات الحسابية المعتادة كما تخضع الدرجات أو القيم كالدقائق والأرطال والدرجات ، بينما لو أمكن تحديد قيم للأفراد أتاحت هذه القيم فرصا كثيرة لاستنتاجات تتعلق بهذه القيم كما يمكن استخدام هذه القيم في عمليات أخرى يستفيد بها الباحث لأغراض شتى .

والطريقة الشائعة الاستخدام في القياس تكون باعطاء الفرد أو الشيء قيمة خاصة .

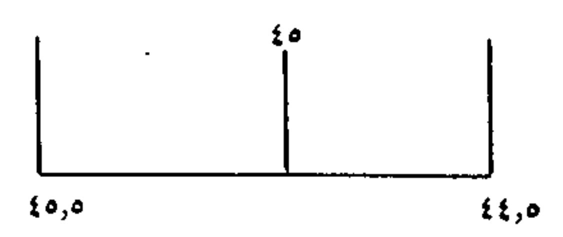
فالباحث في علوم التربية والنفس والاجتماع يطبق اختبارا تحصيليا أو نفسيا على عدد من الأشخاص ويعطي كلا منهم درجة تدل على مدى تحصيله أو مدى اتصافه بصفة نفسية خاصة ، أو درجة اعتناقه لرأي اجتماعي معين أو درجة تعصبه لجهة من الجهات

وتحديد قيمة الشيء عدديا فيه فرض ضمني بأن الصفة التي نقيسها لها وحدات يمكن اتخاذها أساسا للتقييم . كما أن فيه افتراض ضمني آخر وهو أن الوحدات تسير بتسلسل منتظم وبفترات متساوية ، هذا والتقدير في كثير من اختبارات التحصيل أز القدرات أو السمات النفسية قد يتخذ صورا أخرى غير الدرجة ، ففي بعض الاختبارات يتخذ مستوى الصعوبة التي يقف عندها الفرد مقياسا للتحصيل أو التفوق كما يتخذ في بعضها الآخر سرعة أداء الشخص لعمل معين ، بأن يحسب الزمن الذي يستغرقه في أداء هذا العمل ، أو كمية العمل التي تتم في زمن معين . وفي أغلب الاستبيانات الاجتماعية يتخذ عدد الاجابات بنعم أو لا مقياسا للاتجاه العقلي أو شدة أو مدى اعتناق الشخص لفكرة خاصة .

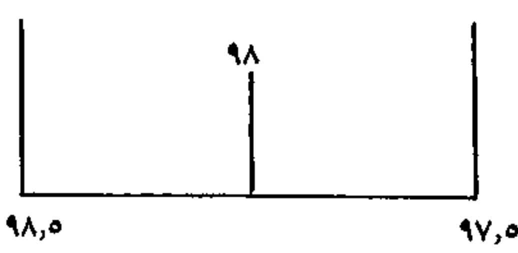
وبالرغم من أن درجات الاختبار التحصيلي أو النفسي أو الاستبيان لا تختلف عن القيم المادية التي تصف الأشياء الطبيعية الأخرى كالحجم والمساحة .. الخ . في أنها تخضع للعمليات الحسابية المختلفة كالجمع والطرح والضرب .. الخ الا أن هناك فرقا ... ، بمعنى أن ٣٠ رطلا في الوزن تعادل ضعف المطلق — ثلاثين وحدة بينما ترتفع الثانية لبق هذا في الدرجات القياسية في الاختبارات يمكن أن تعادل ثلث درجة ٣٠ في نفس د صفر لهذا التقدير فهذا معناه في مثل هذه ـرة على وجه الاطلاق .

ـية الى قسمين مختلفين ، هما القيم المستمرة Continuous والقيم الأول يمكن تمثيله بنقط متتابعة لا حصر لها على مستقيم واحد ، ا عدد لا حصر له من القيم المتلاصقة بحيث لا ينقطع تتابعها أن نحصل ضمن هذه السلسلة المتتابعة على أية قيمة مهما كان ـيم أطوال الأشياء ، فالطول صفة لا تنقطع وحداته . فبين ٥ ـد مثلا ٥,١ سم ، ٥,٢ سم .. الخ . كما نستطيع أن نجد ٥,١١ ؛ سم .. الخ ... ٥,١١١ سم . ٥,١١٢ سم ، ٥,١١٣ سم ... الخ ـخاص مثلا في مجموعات مختلفة مقياس متقطع القيم ، ذلك لأن ـت وبعضها ، أي أنه بين الرقم ٣ (٣ أشخاص) وبين الرقم ٤ لا تملؤه قيم متدرجة . فلا يمكننا أن نجد مجموعة بها ٣,٢ شخصا أو ٣,٩٢ شخصا وهكذا .

وعلى هذا نستطيع أن نفهم للقيم في المقياس المتصل معنى يختلف قليلا عن الذي نفهمه عادة . فأية درجة في اختبار أو أي مقياس للطول ، ما دام التقويم في كليهما متصلاً يمكن أن ينظر اليه على أنه مسافة بين نقطتين ، فدرجة ٤٥ في اختبار ما يمكن اعتبارها لا على أنها نقطة منفصلة محددة على المقياس ، بل على أنها مسافة حدها الأدنى ٤٤,٥ مع اعتبار أن النقطة الوسطى في هذه المسافة هي التي تعادل الدرجة ٤٥ .



ويكون معنى الدرجة ٩٨ على نفس هذا الأساس المسافة المحددة بالدرجتين ٩٧,٥ و ٩٨,٥ .



وهكذا بينما يختلف الحال في القيم المتقطعة ، ذلك لأن كلا منها قيمة تمثلها نقطة على المستقيم الذي يبدأ بالقيمة الصغرى وينتهي بالقيمة الكبرى .

التـــوزيع التـــكراري :

التوزيع التكراري وسيلة لتصنيف البيانات التي سبق جمعها ، فالباحث في هذه العملية يقوم بعمل فراز البريد الذي يقوم بفرز الخطابات حسب الجهة المرسلة ، الا أن الباحث في تصنيف بياناته هو الذي يختار الفئات التي يحددها لنفسه . فهدف التوزيع التكراري اذن ترتيب البيانات وتقسيمها تقسيما يسهل ادراك ما بينها من علاقات ، ويوضح صفاتها ودلالتها . فاذا احتاج بحث الى جمع حالات من أفراد ذوي دخول يومية مختلفة وعددهم ٦٠ فردا وكانت دخولهم اليومية بالريال كالآتي :

٣٥	٢٦	٢٢	١٨	٥٣	٤٦	٦٤	٥٦	٣٨	٤٣	٣٩	٤٤
٢٢	٣٨	٤٤	٢٩	٦٢	٢٨	٢٣	٢٢	١٩	٥٥	٤٢	٣٧
٦٤	٤٥	٧	٣٢	٣٤	١٩	٢٥	١٩	٧	٥١	٢٥	١٥
٨	١٧	٤٥	٢٧	٢٥	٢٧	١٨	٩	٤٨	٦٧	٥٦	٥٢
١٥	٢٢	٦٢	٣٦	٥٩	٦	٢٤	٣٧	٦٢	٦٠	٥٨	٥٨

جدول (١) الدخول اليومية لستين فرداً بالريال

فان هذه القيم في وضعها هذا لا يمكن أن تفيد الباحث في اعطائه فكرة واضحة عن هذه المجموعة . ولذلك فانه من الطبيعي عادة أن يفرغ هذه البيانات في جدول يضم القيم المتجاورة في فئة واحدة تنفصل عن غيرها من الفئات . أي أنه يصنف هذه القيم الستين في مجموعـــات .

اختيـــار مـــدى الفئـــة :

ومن الطبيعي أنه لا توجد طريقة واحدة لتقسيم مثل هذه البيانات الى مجموعات متدرجة وتصنيفها تبعا لذلك ، ذلك لأن مدى الفئة أي الفرق بين حدها الأدنى والأقصى يختاره الباحث بنفسه . وعلى هذا فهي تتوقف على الهدف الذي يضعه الباحث من هـــذا التصنيف . الا أنه ينبغي أن يكون عدد أقسام التصنيف مناسبا . فاذا كان عدد الأقسام صغيرا كأن نقسم هذه الدرجات مثلا الى قسمين أو ثلاثة ضاع على الباحث أغلب الفوائد التي يمكنه أن يجنيها من هذا التصنيف ، كما أن مثل هذا الحال يحدث اذا كان عدد الأقسام كبيرا . ومن المستحسن أن يكون عدد الأقسام محصورا بين عشرة وعشرين اذا أمكن ، ولكن ليست هذه قاعدة عامة ينبغي أن نتبعها دائما . فقد يحدث أن تتجمع القيم المراد تصنيفها في مدى ضيق بحيث يتعذر ايجاد عدد مناسب من الأقسام

ولتحديد الفئات ينبغي ان تحدد أولا الحدين الأدنى والأقصى للقيم المعطاة ففي المثال السابق نلاحظ أن أقل قيمة هي ٧ وأكبر قيمة هي ٦٧ . أي أن الفئة الأولى في هذه الحالة أو أقل الفئات قيمة ينبغي أن تكون مشتملة على القيمة ٧ . كما ينبغي أن تكون أكبر الفئات قيمة مشتملة على القيمة ٦٧ . ونظرا لأن مدى توزيع القيم هو ٦٧ - ٧ = ٦٠ ، فيمكننا ان نقسم هذه القيم الى فئات مدى كل فئة ٤ أو ٥ ، أو ٦ ريالات . أو تكون

حدود الفئات مكررات ٤ ، أي نبدأ مثلا بالقيمة ٤ في الفئة الأولى و ٨ في الفئة الثانية و١٢ في الفئة الثالثة وهكذا .

تسلسل الفئـــات :

اذا اعتبرنا الفئة الأولى محددة بين ٤ ، ٨ فأمامنا في هذا الحل أربع طرق للتجمع ، فاما أن نجعل الفئة تبدأ بعد ٤ وتنتهي قبل ٨ ، أي تشتمل على القيم التي تزيد عن ٤ وتقل عن ٨ وتشمل التي بعدها على القيم التي تزيد عن ٨ وتقل عن ١٢ وهكذا ، وهنا نجد صعوبة في وضع القيمة ٨ في هذه الطريقة حيث لا يمكن وضعها في الفئة الأولى أو الفئة الثانية .

والطريقة الثانية تكون بأن ندخل كلا من ٤ ، ٨ ضمن الفئة ، أي أن نجعل الفئة من ٤ ــ ٨ بما فيها القيمتين ٤ ، ٨ .

وتسير الفئات بالتسلسل الآتي : ــ

٤ فما فوق ــ ٨
٩ فما فوق ــ ١٣
١٤ فما فوق ــ ١٨
. . . . وهكذا .

وفي هذه الحالة نجد أن مدى كل فئة خمس وحدات وليست أربع ، كما أننا نرى أن هذه الطريقة لا تصلح الا في القيم المتقطعة التي لا يوجد فيها اتصال بين الوحـــدات الصحيحة . فاذا فرضنا أن هذه القيم متصلة ، فاننا نصادف صعوبة في تحديد فئة القيم التي بين ٨ ، ٩ أو التي بين ١٣ ، ١٤ أي ما بين الحد الأقصى للفئة والأدنى للفئة التي تليها .

والطريقة الثالثة هي أن تبدأ الفئة بما يزيد عن قيمة خاصة وتنتهي بقيمة محددة ، ففي هذا المثال نستطيع أن نقول :

ما فوق ٤ ــ ٨
ما فوق ٨ ــ ١٢
ما فوق ١٢ ــ ١٦
. . . . وهكـــذا

وبذلك نضمن مكانا لجميع القيم سواء كانت البيانات مستمرة أو متقطعة كما هو الحال في الجدول الآتي ، وهو يبين حالة الملكية العقارية سنة ١٩٥٢ في احدى البلاد .

فئات المساحة	عدد الملاك	جملة المساحة
أكثر من فدان الى خمسة	٦٢٣ ٧٤٦	١٣٤٣ ٩٩٩
أكثر من خمسة الى عشرين	٧٩ ٢٥٩	٥٢٥ ٩٠٤
أكثر من عشرة الى عشرين	٤٦ ٨٢٣	٦٣٧ ٥٥٦
أكثر من عشرين الى ثلاثين	١٣ ٠٨٨	٣٠٩ ٤٠٩
أكثر من ثلاثين الى خمسين	٩ ٢٠٤	٣٤٤ ٤٥٨
أكثر من خمسين الى مائة	٦ ٣٧٨	٤٢٩ ٤٩٤
أكثر من مائة الى مائتين	٣ ١٨٤	٤٣٦ ٧٧٥
أكثر من مائتي فـــدان	٢ ١٣٦	١١٧٦ ٨٠١

جدول (٢) الملكية العقارية في احدى البلاد

والطريقة الرابعة وهي عكس السابقة أي تبدأ بقيمة محددة وتنتهي بأقل من قيمة محددة فنقول مثلا :

من ٤ الى اقل من ٨
من ٨ الى اقل من ١٢
من ١٢ الى اقل من ١٦
. . . . وهكـــذا

وفي أية طريقة من هذه نجعل التصنيف يتجه اتجاها تصاعديا أي بادئا بأصغر القيم ثم يصعد بالتدريج حتى يصل الى أكبر قيمة أو العكس ، فنقول مثلا :

٤ – أقل من ٨
٨ – أقل من ١٢
١٢ –أقل من ١٦
وهكـــذا . . . . . .

او

من ٦٤ – أقل من ٦٨
من ٦٠ – أقل من ٦٤
من ٥٦ – أقل من ٦٠
. . . . . وهكـــذا

والطريقة التي سنتبعها في هذا الكتاب هي طريقة التدرج التصاعدي أي الذي يبدأ بالقيم الصغيرة وينتهي بالكبيرة ، كما أننا سنتخذ الوضع الذي يبدأ بقيمة محدودة وينتهي بأقل من قيمة محدودة ، وبتطبيق هذا الوضع على المثال السابق (جدول ١) نصل الى التصنيف الآتي .

٤ — أقل من ٨
٨ — أقل من ١٢
١٢ — أقل من ١٦
١٦ — أقل من ٢٠
٢٠ — أقل من ٢٤
٢٤ — أقل من ٢٨
٢٨ — أقل من ٣٢
٣٢ — أقل من ٣٦
٣٦ — أقل من ٤٠
٤٠ — أقل من ٤٤
٤٤ — أقل من ٤٨
٤٨ — أقل من ٥٢
٥٢ — أقل من ٥٦
٥٦ — أقل من ٦٠
٦٠ — أقل من ٦٤
٦٤ — أقل من ٦٨

ولاختصار الوضع يكفي أن نوضح التتابع كما يأتي :

٤ —
٨ —
١٣ — وهكذا

فهذا الوضع يدل على أن الفئة الأولى تبدأ بالقيمة ٤ وتنتهي قبل القيمة ٨ والثانية تبدأ بالقيمة ٨ وتنتهي قبل القيمة ١٢ وهكذا .

يقي أن نحدد عدد الأفراد التي تقع في كل فئة حسب البيانات المعطاة . والطريقة

المتبعة لذلك هي وضع خطوط (علامات) يدل كل خط منها على أن هناك قيمة تتبع الفئة الموضوع بها . فالقيمة الأولى وهي ٣٥ نعبر عنها بخط أمام الفئة (٣٢ - —) ، والثانية وهي ٢٢ نعبر عنها بخط أمام الفئة (٢٠ —) . الا أنه مما يسهل عد هذه الخطوط أن تجمع في مجموعات من خمس . فاذا كانت أمام الفئة أربعة علامات هكذا //// وأردنا أن نضع علامة خامسة ربطنا هذه العلامات الأربعة .

والجدول التكراري يحتوي على ثلاثة أعمدة : الأول يبين الفئات ، والثاني يبين العلامات ، والثالث يبين عدد العلامات في كل فئة أو ما نعبر عنه بالتكرار فهو في المثال السابق كما يلي :

فئـــات	علامات	تكـــرار
٤ —	///	٣
٨ —	//	٢
١٢ —	//	٢
١٦ —		٥
٢٠ —	////	٤
٢٤ —	//	٧
٢٨ —	///	٣
٣٢ —	////	٤
٣٦ —	/	٦
٤٠ —	//	٢
٤٤ —		٠
٤٨ —	//	٢
٥٢ —	//	٢
٥٦ —		٠
٦٠ —		٠
٦٤ —	///	٣
المجموع		٦٠

جدول ٣ ـ الجدول التكراري

ومن الواضح أن صحة مجموع التكرارات أي مطابقته لعدد القيم المعطاة لا يدل دلالة كافية على صحة العمل ، فهو يدل فقط على أن جميع القيم قد دونت في الجدول التكراري وأن كلا منها قد دون مرة واحدة ، ولكن لا زال هناك مجال للخطأ في وضع احدى العلامات في الفئة الخاطئة . وليس أمامنا اتلافي هذا الخطأ الا أن نلزم الدقة والحرص في وضع العلامات ولا بأس من تكرار العملية للتأكد من صحتها .

ويلاحظ في مثل هذا الجدول ملاحظتان :

١ ـ أن أقل قيمة للتصنيف وأعلى قيمة محددتان في الجدول .

٢ ـ أن الفئات تسير بتتابع منتظم أي أن مدى الفئات متساو .

ولكن يحدث في كثير من الأحيان أن يفضل الباحث تصنيف بياناته في جداول ليس فيها هاتان المميزتان ، كأن يجعل مبدأ التوزيع مفتوحا أي ليس له حد أدنى محدد فتبدأ الفئات مثلا بالفئة أقل من ١٥ ثم تتابع بعد ذلك بانتظام ١٥ ـ ٢٠ ، ٢٥ ... الخ اذا كان عدد القيم التي تقل عن ١٥ قليلة لا تستحق وضعها في عدد من الفئات أو أن يكون الجدول مفتوحا من طرفه العلوي لنفس السبب ، فقد تكون الفئة الأخيرة مثلا ٧٥فأكثر ، واليك مثال واقعيا على ذلك .

فالجدول الآتي مفتوح من طرفيه ، وهو يبين تعداد التلاميذ في سنوات متعاقبة موضحا بالألف .

فئات السن	١٩٥١ ١٩٥٢	١٩٤٨ ١٩٤٩	١٩٤٥ ١٩٤٦	١٩٤٢ ١٩٤٣	١٩٣٩ ١٩٤٠
أقل من ٥ سنوات	٢٧	٢٣	٢٤	١٥	١٩
من ٥ ـ أقل من ٨ سنوات	٦١٦	٤٦٤	٤٢٤	٤٤٨	٤٨٨
من ٨ ـ أقل من ١٠ سنوات	٤٤٣	٤٤٤	٤٥١	٥٠٩	٥٧٢
من ١٠ ـ أقل من ١٣ سنة	٤١٦	٤٨٦	٣١٦	٣٦٢	٣٤٣
من ١٣ ـ أقل من ١٦ سنة	٢١١	١٥٣	١٠٣	٧٨	٧٦
١٦ سنة فأكثر	١٧٨	١٢٧	٨٤	٦٧	٦٥
المجموع	١٩٠١	١٥٠٧	١٤٠٢	١٤٨٠	١٥٦٣

جدول (٤) جملة التلاميذ في احد البلاد حسب فئات السن (جدول مفتوح الطرفين)

كما أنه يضطر الى توزيع بياناته على فئات غير متساوية المدى اذا وجد أن بعض الفئات قليلة التكرار مما يفضل معه ضم كل فئتين أو أكثر واعتبارهما فئة واحدة كما هو الحال في المثال الآتي الذي يبين توزيع مقدار السكان حسب فئات السن بـ (بالأرقام بالألف) .

فئات السن	١٩٤٧	١٩٣٧	١٩٢٧	١٩١٧
أقل من سنة	٥٠٨	٤٩٠	٤٩٣	١٨٥
من ١ – أقل من ٥ سنوات	٢٠٧٧	١٦١٨	١٥٣٨	١٥٦٩
من ٥ – أقل من ١٠	٢٤٠٠	١٣٠٩	١٨٥٩	١٨٠٢
من ١٠ – أقل من ١٥	٢٢١٤	١٩٠٩	١٥٨٠	٢٥٨١
من ١٥ – أقل من ٢٠	١٩٠١	١٣٤٦	١٢٩٥	
من ٢٠ – أقل من ٣٠	٢٨٥٦	١٤١٤	٢٣٢٦	١٩٧٩
من ٣٠ – أقل من ٤٠	٢٦٣٣	٢٣٣٤	٢٠٠١	١٧٢٣
من ٤٠ – أقل من ٥٠	١٩٧٩	١٦٠٥	١٣١٧	١١٤٢
من ٥٠ – أقل من ٦٠	١٢١٤	٩٤٥	٨٠١	٧٥٢
من ٦٠ – أقل من ٧٠	٧١٧	٥٧٨	٥١٩	٤٩١
من ٧٠ – أقل من ٨٠	٢٩٢	٢٧٩	٢٥٩	٢٨٠
من ٨٠ – أقل من ٩٠	٩٨	١١٤	١١١	١٢٧
٩٠ سنة فأكثر	٣٠	٤٣	٤٠	٤٧
أعمار غير متباينة	٥٨	٣٧	٣٩	٤٠
المجموع	١٨٩٦٧	١٥٩٢١	١٤١٧٨	١٢٧١٨

جدول (٥) يبين عدد السكان في احد البلاد حسب فئات السن

ولا يشترط دائما أن يصنف الباحث بياناته تبعا لفئات عددية ، بل كثيرا ما يحتاج الى أساس نوعي في تصنيفه ، فيقسم المجموعة الكلية الى أنواع مختلفة كما هو الحال في الجدول التكراري الآتي :

درجة التعليم	١٩٤٧		١٩٣٧		١٩٢٧		١٩١٧*	
	ذكور	اناث	ذكور	اناث	ذكور	اناث	ذكور	اناث
ملمون بالقراءة والكتابة فقط	٣٢٦٦	٩٢٤	١٧١١	٦٥٤	١٥٠٢	٢٧٢		
حملة شهادات أقل من متوسطة	١٤٦	٥٣	١٠٤	٢٤	٢٩	٤		
حملة شهادات متوسطة	٩٦	١٧	٣٥	٤	٢١	١		
« « عالية	٤٤	٣	٢٥	١	١١	١		
« « فنية عالية	٥	—	٤	—	—	—		
« « خصوصية عالية	٣	—	٢	—	—	—		
« « عالية من الخارج	١	١	٥	١	*٢٠	*٦		
الجملـــة	٢٥٦١	٩٩٨	١٨٨٦	٦٨٤	١٣٨٧	٢٨٤	٨٤٧	١١٤

جدول (٦) تعداد المتعلمين في احد البلاد حسب التعليم مقدار بالألف

(*) يشمل الحاصلين على شهادات أجنبية من مختلف الدرجات .

تمثيل التوزيـــع بالـــرسم :

يعطينا الجدول التكراري صورة عامة عن توزيع القيم ، أي تكرارها النسبي . الا أنه يفضل دائماً أن يمثل هذا التوزيع بالرسم فذلك يعين على زيادة الوضوح والمقارنة السريعة . ويستعمل في التمثيل بالرسم طرق عديدة أهمها :

١ ــ المضلع التكراري .

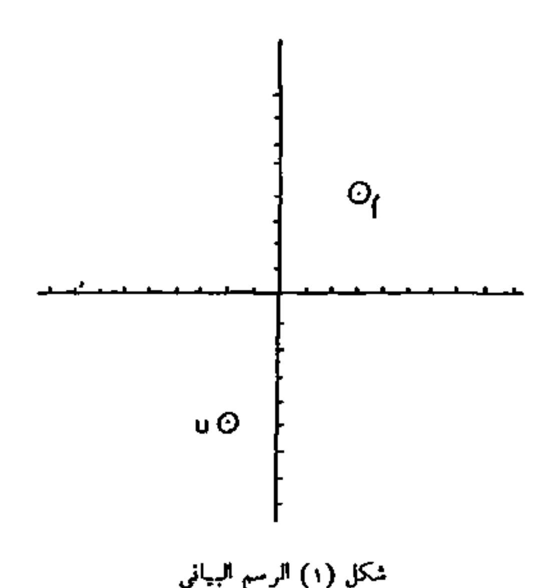
٢ ــ المدرج التكراري .

٣ ــ المنحنى التكراري .

٤ ــ المنحنى التجمعي .

الأساس الرياضي في التمثيل بالرسم :

يستعمل في الرسم التوضيحي أو البياني محوران متعامدان يطلق على المحور الأفقي المحور السيني والمحور الرأسي المحور الصادي ويطلق على نقطة تقابلهما نقطة الأصل . وتكون قيم (س) على يمين نقطة الأصل دائما موجبة ، وتزيد قيمتها كلما بعدت عنها ، وسالبة على يسار نقطة الأصل ، وتزيد قيمتها السالبة كلما بعدت أيضا عنها ، أما في المحور الصادي فتكون القيم الموجبة هي التي فوق نقطة الأصل ، والقيم السالبة هي التي تحتها ، فالنقطة (أ) في الرسم هي المعبرة عن س = : ٣ و ص = ٤ والنقطة (ب) هي المعبرة عن س = ـ ٢ و ص = ـ ٥



شكل (١) الرسم البياني

يحتاج مثل هذا الرسم بطبيعة الحال الى ورق مربعات ، مقسم طولا وعرضا الى سنتيمترات ومليمترات أو غير ذلك من الوحدات.

ولا يشترط مطلقا أن نعبر في الرسم عن كل وحدة في القيم بمسافة طولها سنتيمتر واحد ، بل قد نضطر في كثير من الأحيان الى التعبير عن كل وحدة بجزء من السنتيمتر أو أكثر من سنتيمتر . فاختيار الوحدات يتوقف على الحيز الذي نرسم فيه والقيم التي نريد تمثيلها ، ولكن من المستحسن أن يكون عرض الرسم أكبر قليلا من ارتفاعه .

المضلــع التكراري :

لتوضيح الجدول التكراري باستعمال المضلع ، نستعمل عادة المحور الأفقي لتمثيل الفئات والمحور الرأسي لتمثيل التكرار ، وتنحصر خطوات العمل فيما يأتي :

١ ــ اختر المقياس المناسب لتمثيل الوحدات المعطاة في الجدول ، فمثلا في الجدول التكراري الآتي الذي يبين تكرار درجات مجموعة من الأشخاص في مقياس للاتجاهات العقلية :

فئات الدرجات	التكرار
٢٠ ــ	٤
٢٥ ــ	٧
٣٠ ــ	٦
٣٥ ــ	١٥
٤٠ ــ	٣٨
٤٥ ــ	٢٦
٥٠ ــ	١٢
٥٥ ــ	٨
٦٠ ــ	١١
٦٥ ــ	٦
المجمــوع	١٣٣

جدول (٧) توزيع الدرجات في مقياس للاتجاهات العقلية

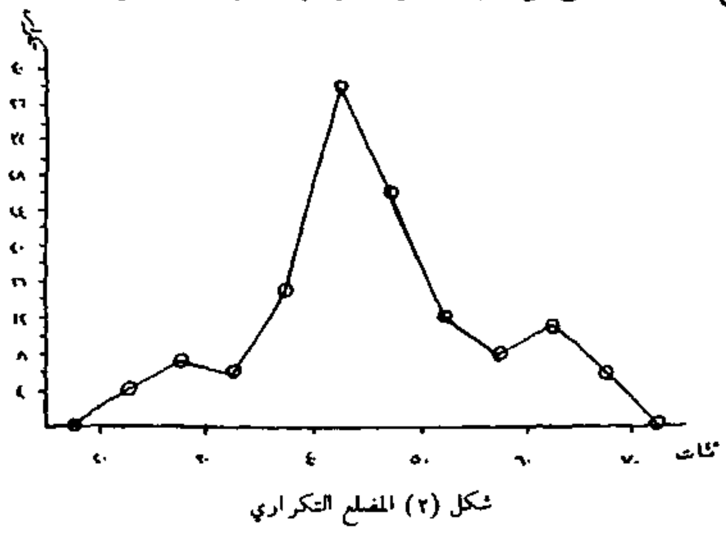
نجد عشر فئات ، فنستطيع اتخاذ كل (١) سم في المحور الأفقي لكل فئة ما دام عرض الورقة التي نستعملها أكثر من ١٠ سم ، وفي حالة التكرارات التي تمثل على المحور الرأسي نجد أن أكبر تكرار في الجدول هو ٣٨ ، فلو اتخذنا كل (١) سم ممثلا خمس تكرارات احتجنا في ذلك الى ٨ سم على الأقل ، وهو ارتفاع مناسب للشكل .

٢ ــ ضع حدود الفئات في المحور الأفقي ودرج المحور الرأسي مبينا ما تمثلــه الارتفاعات المختلفة من التكرار .

٣ — عبر عن تكرار كل فئة بنقطة توضع في مركز الفئة تماما وعلى ارتفاع معادل لتكرارها حسب المقياس الذي سبق اتخاذه .

٤ — صل بين النقط المتتالية بمستقيمات فيكون الشكل الناتج عن ذلك هو المضلع المطلوب .

ومن المتبع عادة أن يضاف الى التوزيع في الرسم فئتان احداهما أقل من أصغر فئة في التوزيع والأخرى أعلى من أكبر فئة فيه . ويكون تكرارهما بطبيعة الحال صفرا .



شكل (٢) المضلع التكراري

المقارنة بين توزيعين مختلفين باستعمال المضلع التكراري :

ليس من السهل أن نحصل على مقارنة صحيحة بين مجموعتين بمجرد ملاحظة الجدول التكراري لكل من التوزيعين ، والتوضيح بالرسم يؤدي في ذلك خدمة للباحث ، ولكن احدى المشاكل التي نصادفها هي الحالات التي يختلف فيها مجموع التكرارات في التوزيعين ، وذلك لأن مقارنة ارتفاع المضلع في الفئات المختلفة لا تعطي صورة واضحة في هذه الحالة عن حقيقة اختلاف التوزيعين . والحل الوحيد اذا ما حدث هذا الاختلاف في العدد الكلي للقيم أن نلجأ الى استخراج النسب المئوية للتكرار في كل فئة بالنسبة لمجموع التكرار في كل من المجموعتين ، بذلك نوحد بين مجموع التكرارين بجعل كل منهما مائة .

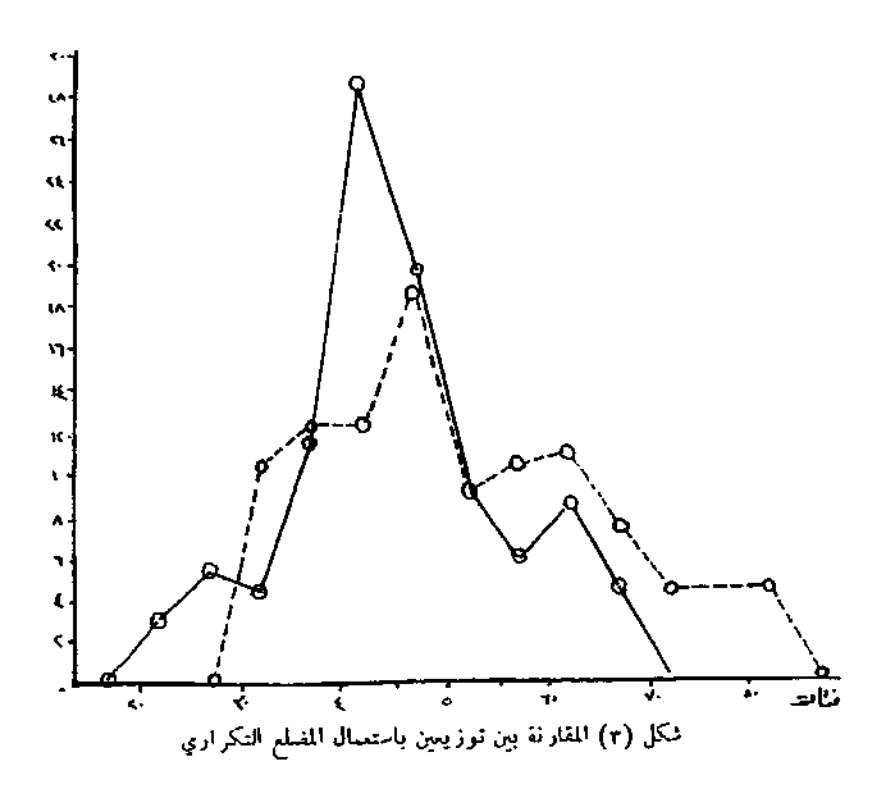
مثال : طبق نفس مقياس الاتجاهات السابقة جدول (٧) على مجموعة أخرى فكان توزيع الدرجات كما هو مبين في الجدول رقم (٨) .

الفئات	التكرار
٣٠ ـــ	٢٥
٣٥ ـــ	٣٢
٤٠ ـــ	٣٠
٤٥ ـــ	٤٦
٥٠ ـــ	٢٢
٥٥ ـــ	٢٥
٦٠ ـــ	٢٧
٦٥ ـــ	١٨
٧٠ ـــ	١٠
٧٥ ـــ	١٠
المجموع	٢٤٥

جدول (٨) توزيع درجات مجموعة أخرى في مقياس الاتجاهات العقلية

الفئات	المجموعة الأولى		المجموعة الثانية	
	التكرار	النسبة المئوية	التكرار	النسبة المئوية
٢٠ ـ	٤	٣	—	—
٢٥ ـ		٥,٣	—	—
٣٠ ـ	٦	٤.٥	٢٥	١٠,٢
٣٥ ـ	١٥	١١,٣	٣٢	١٣
٤٠ ـ	٣٨	٢٨,٦	٣٠	١٢,٢
٤٥ ـ	٢٦	١٩,٥	٤٦	١٨,٨
٥٠ ـ	١٢	٩	٢٢	٩
٥٥	٨	٦	٢٥	١٠,٢
٦٠ ـ	١١	٨,٣	٢٧	١١
٦٥ ـ	٦	٤,٥	١٨	٧,٤
٧٠ ـ	—	—	١٠	٤,١
٧٥ ـ	—	—	١٠	٤,١
المجموع	١٣٣	١٠٠	٢٣٥	١٠٠

جدول (٩) التوزيع المئوي للدرجات في المجموعتين



شكل (٣) المقارنة بين توزيعين باستعمال المضلع التكراري

ويتضح من الرسم عدة ملاحظات نذكر منها :

١ – أن درجـــات المجموعة الثانية أكبر بوجه عام من درجات المجموعة الأولى ، ذلك لأن المضلع الذي يمثلها ينتشر في القيم الكبيرة أكثر من مضلع المجموعة الأولى

٢ – قد يبدو من هيئة المضلعين أن انتشار توزيع الدرجات (التشتت) متعادل تقريبا في المجموعتين ولكن الواقع أن انتشار درجات المجموعة الأولى أقل من انتشار الثانية ، وذلك لأن درجات تجمع درجات المجموعة الأولى حول وسط المضلع أكثر منه في المجموعة الثانية ، بالرغم من أن الفرق بين اتساع المضلعين صغير كما يبدو في الرسم وسيأتي توضيح ذلك في الباب الثالث عند الكلام عن مقاييس التشتت .

تسوية المضلع التكـــراري :

لا يستطيع الباحث أن يجري بحثه على جميع الأفراد الذين يجب أن يشملهم البحث ، فهو مضطر لأن يجري بحثه عادة على عينة محدودة . ولا ينتظر مطلقا أن يكون توزيع

العينة مطابقا للتوزيع الأصلي للمجموعة كلها . وكلما كانت العينة صغيرة العدد كلما كان متوقعا أن يشتمل التوزيع على أجزاء غير منتظمة تفسد الشكل العام للتوزيع ، ولذلك فانه من المفيد في كثير من الأحيان أن يعمل تعديل للتوزيع حتى يتخلص الباحث من مظاهر عدم الانتظام التي تنتج عن عامل الصدفة واختيار العينة .

واحدى طرق تعديل التكرار أن يعطى لكل فئة تكرار يعادل متوسط تكرارها مع تكرار الفئة التي قبلها والتي بعدها ، فاذا طبقنا ذلك على الجدول التكراري رقم (٧) نجد أن الفئة الأولى (٢٠ –) يصبح تكرارها (صفر + ٤ + ٧) / ٣ = ٣,٧ الا أنه توجد فئة قبلهـــا (١٥ –) كان أصل تكرارها صفرا فيصبح تكرارها (صفر + صفر + ٤) / ٣ = ١,٣ والفئة الثانية (٢٥ –) يصبح تكرارها (٤ + ٧ + ٦) / ٣ = ٥,٧ والفئة الثالثة (٣٠ –) يصبح تكرارها (٧ + ٦ + ١٥) / ٣ = ٩,٣ كما أنه توجد فئة بعد الأخيرة (٧٥ –) كان أصل تكرارها صفر فيصبح تكرارها (٦ + صفر + صفر) / ٣ = ٢ وهكذا ، ويطلق على هذه الطريقة طريقة المتوسطات المتحركة .

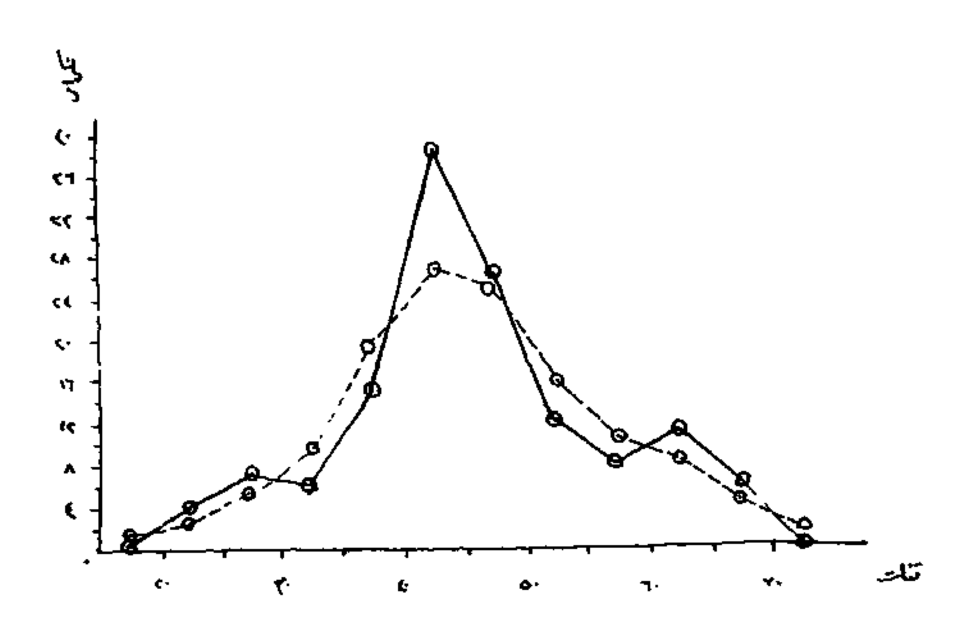
فيصبح الجدول التكراري المعدل كالآتي ·

الفئات	التكرار
١٥ –	١,٣
٢٠ –	٣,٧
٢٥ –	٥,٧
٣٠ –	٩,٣
٣٥ –	١٩,٧
٤٠ –	٢٦,٣
٤٥ –	٢٥,٣
٥٠ –	١٥,٣
٥٥ –	١٠,٣
٦٠ –	٨,٣
٦٥ –	٥,٧
٧٠ –	٢,٠
المجموع	١٣٢,٩

جدول (١٠) المتوسطات المتحركة

ويلاحظ أن مجموع التكرارات لا يتغير تبعا لهذه التسوية

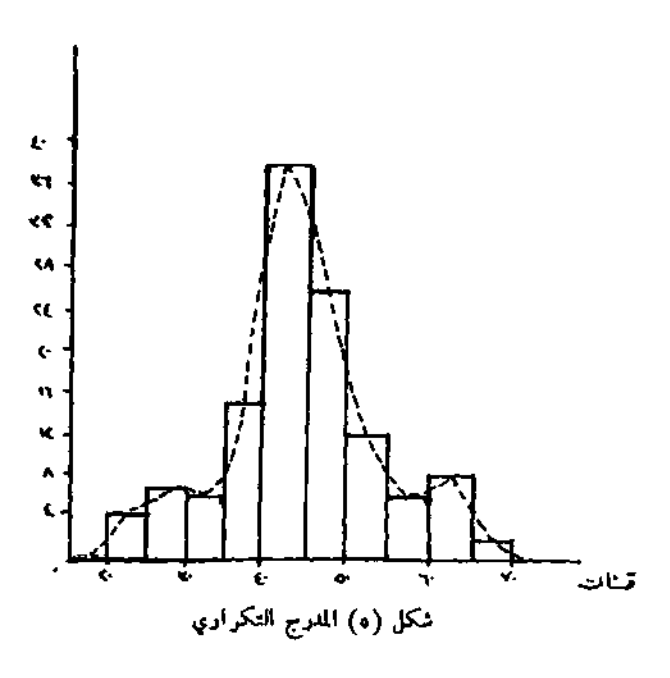
والشكل الآتي يوضح مدى التعديل الذي يحدث في المضلع التكراري نتيجة للتسوية باستعمال المتوسطات المتحركة .



شكل (٤) تسوية المضلع التكراري

المــدرج التــكراري :

لا تختلف الوسيلة الثانية كثيرا عن الوسيلة الأولى ، الا أنه في المدرج التكراري يمثل



شكل (٥) المدرج التكراري

التكرار بمستطيل بدلا من نقطة ، ويرسم المستطيل على الفئة كلها ويكون ارتفاعه (١) (طوله) معبرا عن تكرار الفئة . ومعنى هذا أن الطريقتين تختلفان في الفرض ، ففي المدرج التكراري نفترض أن التكرار موزع بانتظام على جميع قيم الفئة ، أما في المضلع نحن نفترض أن جميع قيم الفئة تمثلهم قيمة واحدة هي مركز الفئة ، فالمدرج التكراري لجدول (٧) يكون كالشكل رقم (٥) .

وتكون خطوات العمل في الرسم كالآتي :

١ ــ حدد الفئات على المحور الأفقي ووحدات التكرار على المحور الرأسي (كما هو الحال في المضلع) .

٢ ــ ارسم فوق كل فئة مستطيلا ارتفاعه يمثل تكرار الفئة .

فيكون الشكل الناتج هو المدرج التكراري .

ويلاحظ أن الفرق بين رسم المضلع والمدرج التكراريين أن تكرار الفئة في المضلع

---

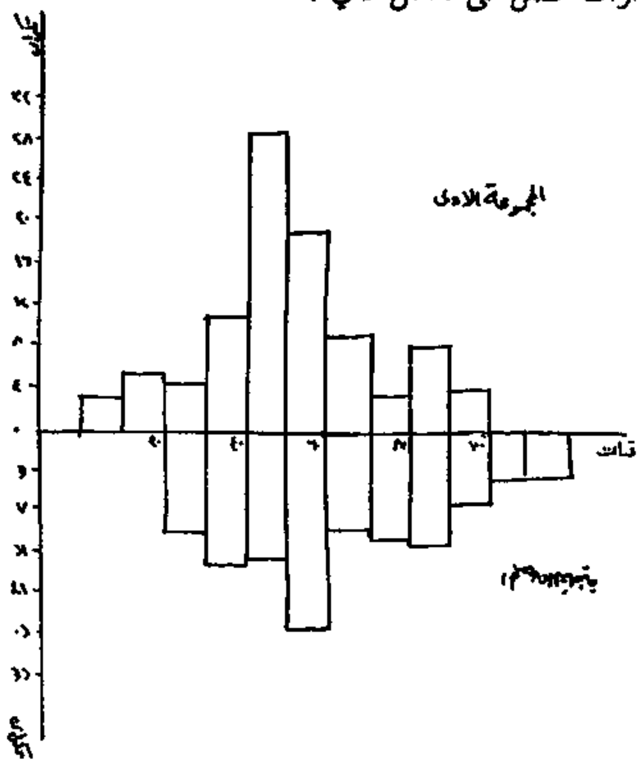
(١) الواقع ان الذي يمثل التكرار هو مساحة المستطيل ولكن المفروض ان عرض المسطيل يمثل وحدة واحدة ولذلك فان مساحة المستطيل تعادل ارتفاعه (طوله) .

التكراري يمثل بنقطة عند مركز الفئة . وأما في المدرج التكراري فيمثل بمستطيل فوق الفئة كلهـــا .

هذا ويمكن أن يرسم كل من المضلع والمدرج التكراريين في رسم واحد كما هو الحال في شكل (٥) .

مقارنة توزيعين باستعمال المدرج التكراري :

لعله من الواضح أنه ليس من السهل استعمال المدرج التكراري للمقارنة بين توزيعين نظرا لتعقد الشكل الناتج وصعوبة المقارنة نتيجة لذلك ، اللهم الا اذا استعملت لونين مختلفين في رسم المدرجين ، ولكن قد يتيسر لنا ذلك اذا استعملنا جهتي المحور الأفقي ، بحيث يرسم أحد المدرجين فوقه والآخر تحته ، وهذا يكون في حالة تساوي العدد الكلي في المجموعتين ، أما في حالة اختلاف هذا العدد فنستعين بالنسب المئوية للتكرار ، كما اتبعنا في رسم شكل (٣) فباستعمال المدرج التكراري لكل من التوزيعين مع استعمال النسب المئوية للتكرارات نحصل على الشكل الآتي :



شكل (٦) مقارنة توزيعين باستعمال المدرج التكراري

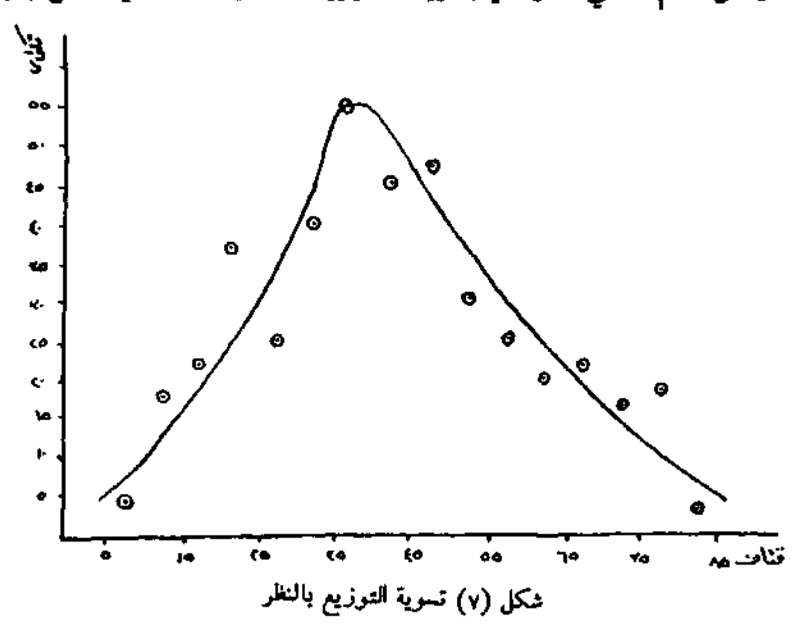
المنحـنى التـكراري :

لا تختلف طريقة رسم المنحنى التكراري عن طريقة رسم المضلع التكراري الا في استعمال الخطوط المنحنية بدلا من الخطوط المستقيمة المنكسرة ، الا أن المنحنى التكراري يستعمل عادة لاعطاء شكل التوزيع بوجه عام ، مع تجاهل بعض مظاهر عدم الانتظام الذي قد يوجد في التوزيع نتيجة للصدف أو لاختيار العينة . ويمكن اعطاء الشكل العــام للتوزيع بوسيلة اجتهادية محضة ، وتكون برسم منحنى عام يمر بأكبر عدد من النقط المعبرة عن التكرار الحقيقي للفئات ، وبشرط أن يقترب المنحنى بقدر الامكان من النقط التي لا يمر بها . وهذه الوسيلة بطبيعة الحال تتوقف على التقدير الشخصي . ونستطيع أن نتخلص من العامل الشخصي باستعمال المتوسط المتحرك الذي سبق استخدامه في تسوية المضلع التكراري ، ففي حالة الجدول التكراري الآتي الذي يبين توزيع أعمار مجموعة من الأفراد :

الفئـات	التكرار
٥ —	٥
١٠ —	١٨
١٥ —	٢٢
٢٠ —	٣٧
٢٥ —	٢٥
٣٠ —	٤٠
٣٥ —	٥٥
٤٠ —	٤٥
٤٥ —	٤٧
٥٠ —	٣٠
٥٥ —	٢٥
٦٠ —	٢٠
٦٥ —	٢٢
٧٠ —	١٧
٧٥ —	١٩
٨٠ —	٤
المجمـوع	٤٣١

جدول (١١) جدول تكراري لأعمار مجموعة من الأفراد

يمكن رسم منحني تكراري بطريقة تقديرية شخصية كالمبين في شكل (٧)

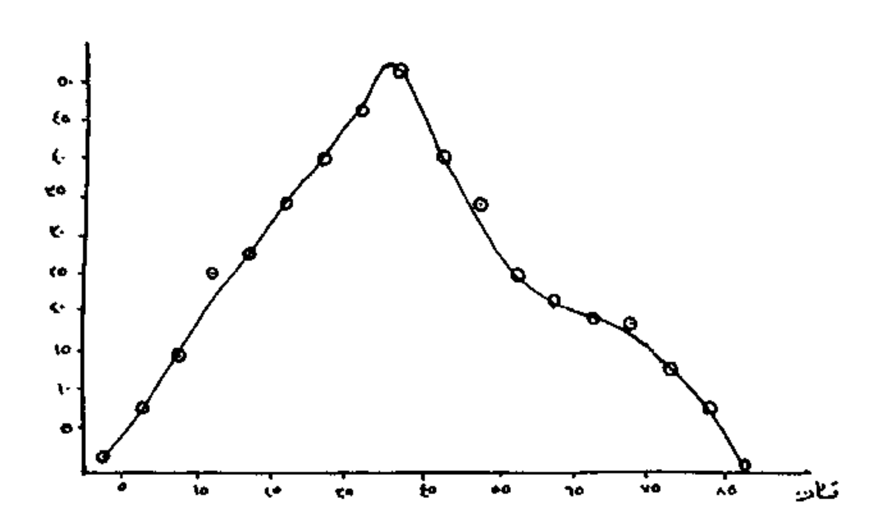


شكل (٧) تسوية التوزيع بالنظر

وبحساب المتوسطات المتحركة لتكرارات الفئات يصبح الجدول التكراري كالآتي :

الفئات	التكرار
صفر	١,٧
٥ —	٧,٧
١٠ —	١٥
١٥ —	٢٥,٧
٢٠ —	٢٨
٢٥ —	٣٤
٣٠ —	٤٠
٣٥	٤٦,٧
٤٠ —	٤٩
٤٥ —	٤٠,٧
٥٠ —	٣٤
٥٥ —	٢٥
٦٠ —	٢٢,٣
٦٥ —	١٩,٧
٧٠ —	١٩,٣
٧٥ —	١٣,٣
٨٠ —	٧,٧
٨٥ —	١,٣
المجموع	٤٣١,١

جدول (١٢) المتوسطات المتحركة لتوزيع أعمار مجموعة من الأفراد



شكل (٨) رسم المنحنى باستعمال المتوسطات المتحركة

وبهذه الوسيلة نستطيع أن نرسم منحنيا معدلا يمر بجميع نقط التكرار تقريبا .

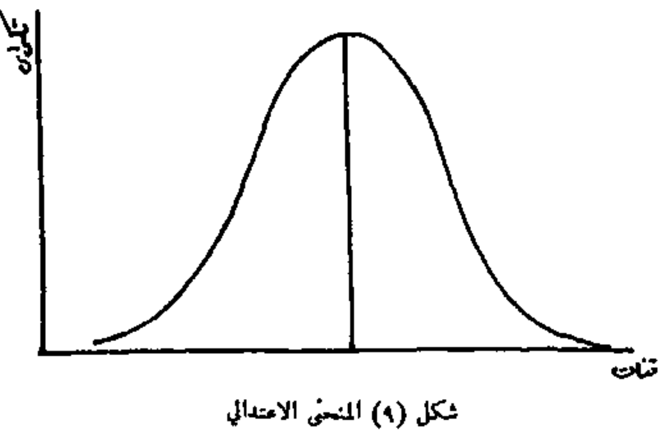
أنواع المنحنيات التوزيعية الشائعة :

في البحوث العلمية سواء كانت نفسية أو اجتماعية لا نحصل مطلقا على منحنيات خالية خلوا تاما من مواضع عدم الانتظام ، ولكننا مع هذا يمكن أن نعدل مثل هــذه

التوزيعات كما سبق توضيحه . وبذلك تحصل على أشكال معينة للتوزيعات الّتي تشملها البحوث . وأهم الأشكال الشائعة لمنحنيات التوزيع ما يأتي :

١ ـ المنحنى الاعتدالي :

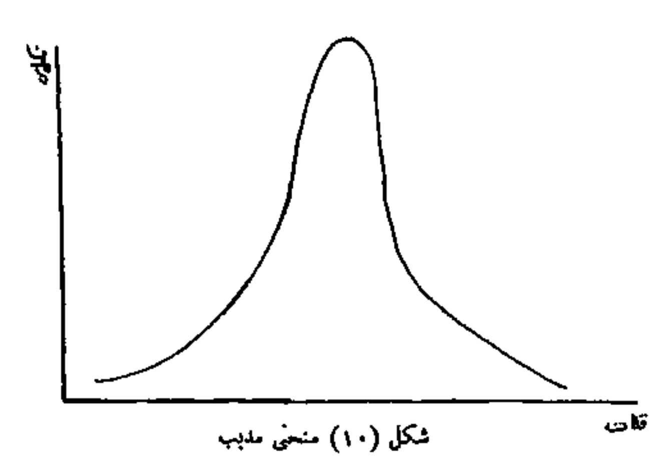
اذا طبق البحث على عدد كبير جدا من الأفراد وأمكن التوصل الى طرق قياس موضوعية خالية خلوا تاما من العوامل الشخصية فان توزيع أغلب القدرات العقلية أو أكثر السمات الانفعالية أو الجسمية تكون موزعة بشكل معين يمثلها منحنى يطلق عليه المنحنى الاعتدالي ، والمنحنى الآتي يمثل توزيع نسبة الذكاء في مجموعة كبيرة جدا من الأفــراد .



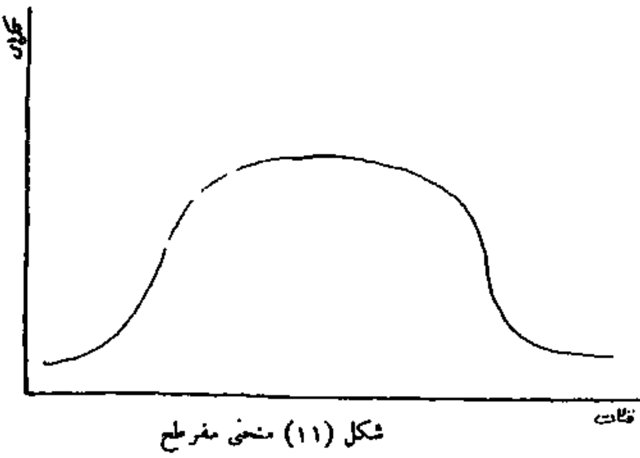
شكل (٩) المنحنى الاعتدالي

ونلاحظ في هذا التوزيع أن عددا قليلا من الأشخاص نسبة ذكائهم ٧٠ بينما يزيد هذا العدد تدريجيا حتّى يبلغ أقصاه عند نسبة ذكاء قدرها ١٠٠ ، ثم يتناقص هذا العدد تدريجيا بنفس النظام الذي زاد به قبل ذلك حتّى يقل عند نسبة ذكاء ١٣٠ ، وهذا يدل على أن العدد الأكبر من المجتمع متوسط الذكاء أو عادي ، بينما أقلهم عددا هم ضعاف العقول والعباقرة . ومن أهم ما نلاحظه في مثل هذا التوزيع أنه متماثل . أي مكون من نصفين منطبقين تقريبا على هيئة الجرس ، ولذا يسمى في كثير من الأحيان بالمنحنى الجرسي وسيأتي الكلام عنه مفصلا فيما بعد .

هذا وقد يختلف اتساع منحنى التوزيع عن المنحنى الاعتدالي فيصبح ضيقا مدببا أو واسعا مفرطحا ، وهذا يتوقف على تشتت القيم الّتي يشملها التوزيع كما في المنحنيين الآتيين :



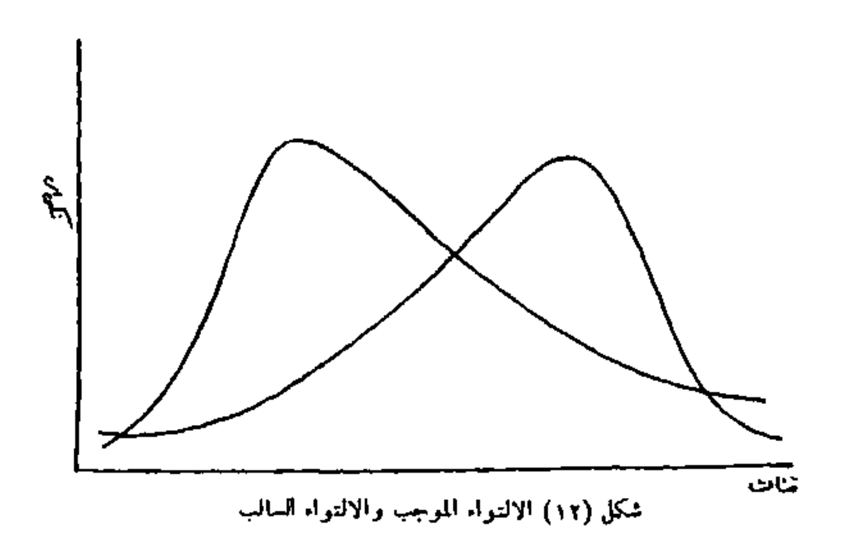
شكل (١٠) منحنى مدبب



شكل (١١) منحنى مفرطح

٢ ــ المنحنى الملتوي Skewed Curve :

يحدث في كثير من البحوث أن نجد أن التكرارات تتجمع في احدى جهتي المنحنى أكثر مما تتجمع في الجهة الأخرى على عكس المنحنى الاعتدالي الذي يتساوى فيه توزيع التكرارات على جانبي المنحنى . فاذا رسمنا منحنى توزيع الايراد الشهري لمجموعة كبيرة من الأفراد محدودي الدخل مثلا كانت التكرارات متجمعة عند القيم الصغيرة . ويوصف هذا المنحنى بأنه موجب الالتواء Positively skewed أي ملتوي نحو القيم الصغيرة . وعلى العكس من ذلك اذا اتجه التواء المنحنى نحو القيم الكبيرة وصف بأنه سالب الالتواء Negatively skewed والالتواء قد يكون ناتجا عن صفة حقيقية في المجتمع الذي يجرى عليه البحث كما في حالة النتائج الدراسية للفصول الضعيفة أو الفصول

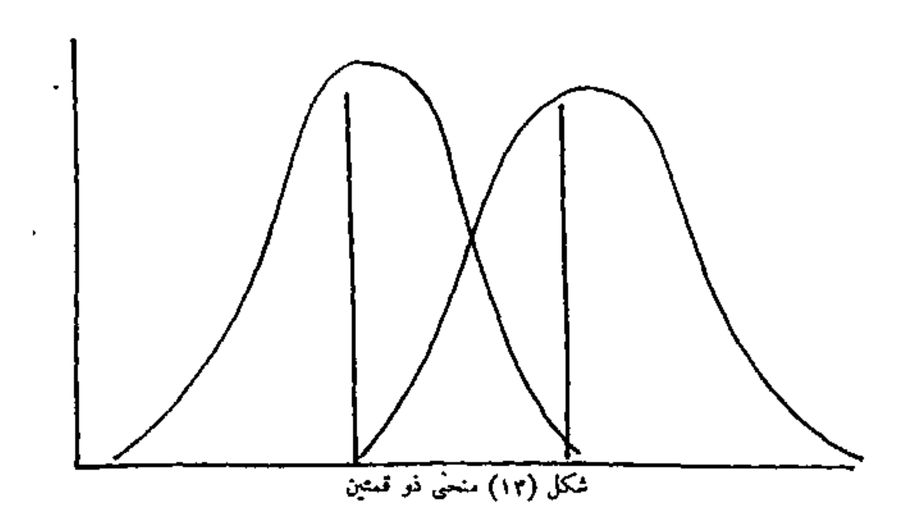


شكل (١٢) الالتواء الموجب والالتواء السالب

القوية ، حيث يكون الالتواء موجبا في الحالة الأولى سالبا في الثانية . أو راجعا الى سوء اختيار العينة بحيث لو أحسن الباحث اختيار العينة التي يجري عليها البحث لزال الالتواء أو خفت حدته ، أوسوء الطريقة المستخدمة في القياس . كما في حالة تطبيق اختبار أعلى أو أقل في مستواه عن مستوى العينة المختبرة ، فالاختبار الصعب يعطي توزيعا موجب الالتواء بينما يعطى الاختبار السهل توزيعا سالب الالتواء .

٣ ـ **المنحنى المتعدد القمم** Multimodal curve :

ينتج المنحنى المتعدد القمم من عدم اتساق وتناسب العينة التي يشملها البحث ، فيتضح من التوزيع أن هناك انفصالا في المجموعة الكلية الى مجموعتين أو أكثر فاذا استطلعنا رأي مجموعة من الأفراد عن مدى أحقية المرأة في مساواتها بالرجل باستبيان مكون من عدد من الأسئلة وكانت المجموعة تشمل الجنسين : الرجال والنساء . فمن المحتمل أن نحصل من نتيجة هذا الاستبيان على منحنى ذي قمتين حيث يختلف توزيع درجات هذا الاستبيان اختلافا يجعل المنحنى العام أميل الى الانفصال الى منحنيين كما هو الشكل الآتي :

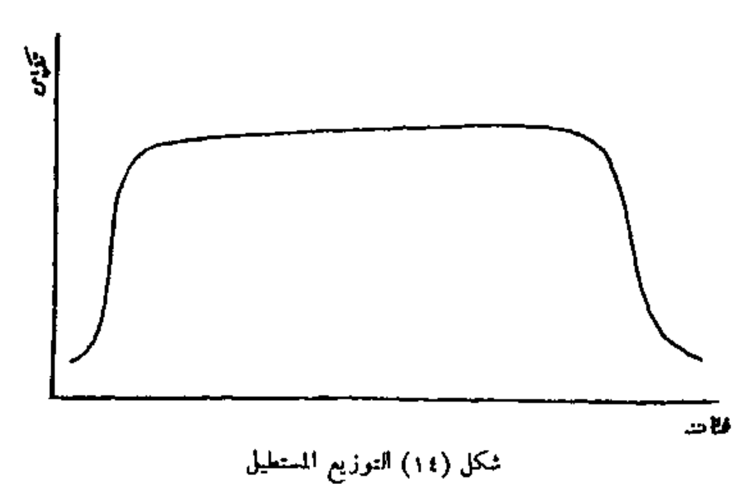


شكل (١٣) منحنى ذو قمتين

وهناك أشكال أخرى للتوزيعات عدا هذه الأنواع الثلاث الا أنها أندر من سابقتها ظهورا في البحوث النفسية والاجتماعية نذكر منها هنا على سبيل المثال :

٤ . التوزيع المستطيل Rectangular Distribution :

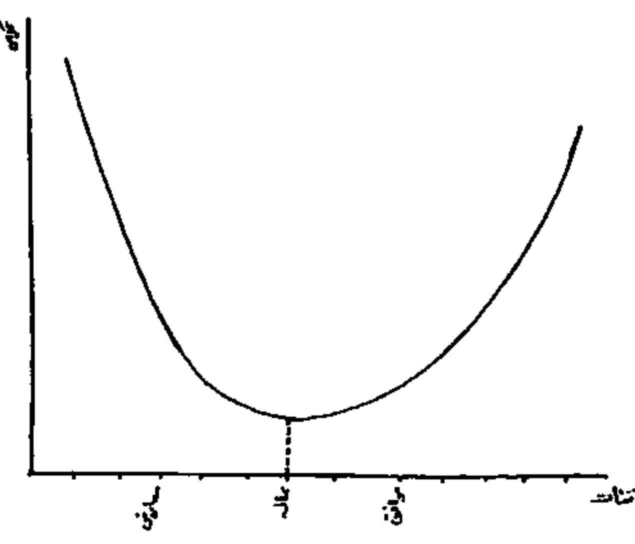
وهو الذي تتساوى فيه تكرار الفئـــات :



شكل (١٤) التوزيع المستطيل

٥ ـــ التوزيع الذي على هيئة حرف U :

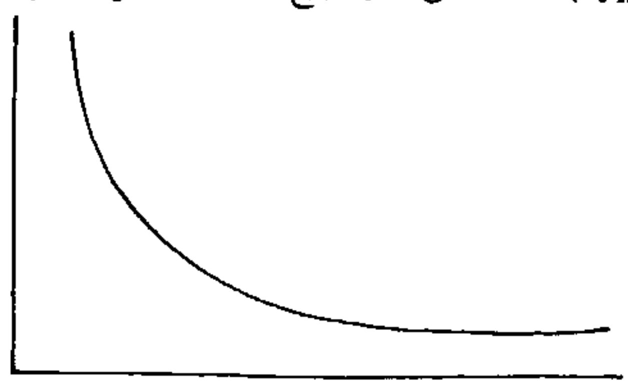
ومن المحتمل أن يظهر مثل هذا التوزيع في الاتجاهات العقلية الواضحة حيث يكثر الأفراد الذين يميلون الى جهة دون أخرى ، ويقل عدد الأفراد المحايدين بين الاتجاهين .



شكل (١٥) توزيع على هيئة حرف U

٦ – التوزيع الذي على هيئة حرف L أو عكسها :

ومن أمثلته توزيع قابلية الأشخاص للاصابة بعدد من الحوادث في فترة زمنية معينة ، فاذا حسبنا عدد الأشهر التي حدثت فيها اصابة واحدة في مصنع معين ، وعدد الأشهر التي حدثت فيها اصابتان وهكذا في فترة عشر سنوات مثلا ، فاننا نحصل على منحنى كالمبين في شكل (١٦) . ذلك لأن عدد الحوادث في أغلب الشهور يكون صغيرا بينما يقل عدد الشهور التي يحدث فيها عدد كبير من الحوادث (بفرض أن ظروف العمل في المصنع طبيعية) كما أن منحنى النسيان يتبع عادة هذا الشكل ومنحنى الحفظ يتبع عكسه .



شكل (١٦) توزيع عدد الاصابات في الشهر لمدة معينة

أسئلة على البـــاب الأول

١ – فيما يأتي درجات خمسين طالبا في اختبار للقدرة اللغوية :

١٥	٢٦	٣٤	٢٨	٥
٣٧	٤٤	٢٥	٢٧	٣٧
٢٨	٣٨	٤٦	٢٥	٨
٢٥	٤٥	٣٤	٤٥	١٩
١٨	٤٢	٢٨	٤٩	٢٢
٥٠	٣٦	١٩	٢٢	٣٥
٢٢	٣٨	٣٢	٣٥	٣٠
٢٧	٢٩	٢٤	٢٧	٢٣
٣٢	٢٢	٢٥	٢٣	٣٨
١٤	١٥	٢٧	١٧	١٦

والمطلوب تصنيف هذه الدرجات في جدول تكراري مدى كل فئة فيه ثلاث درجـــات .

٢ – مثل الجدول التكراري السابق بالرسم مستخدما في ذلك :

(أ) مضلعا تكراريـــا .

(ب) مدرجا تكراريا .

٣ – أعد تصنيف الدرجات السابقة في جدول تكراري مدى كل فئة فيه خمس درجـــات .

٤ – ارسم منحنيا تكراريا للجدول في المسألة السابقة محاولا تسويته بالنظر ثم باستعمال المتوسطات المتحركة .

٦ – قارن بين توزيعي قيم مجموعتي (أ) ، (ب) مستخدما أية طريقة من طرق التوضيح بالرسم :

القيم	تكرار مجموعة أ	تكرار مجموعة ب
٥ –	٢٢	١٣
١٠ –	٣٥	١٧
١٥ –	٤٧	٢٥
٢٠ –	٥٢	٢٦
٢٥ –	٢٨	٢٠
٣٠ –	١٥	٢٢
٣٥ –	٢٠	٣٥
٤٠ –	١٥	٢٧
٤٥ –	٢٢	٢٨
٥٠ –	١٠	٢٨
٥٥ –	١٩	٣٧
٦٠ –	١١	٣٠
٦٥ –	٧	٣٠

جدول (١٣) جدول تكراري لمجموعتين

الباب الثاني

المتوسطات أو القيم المركزية

= المتوسط الحسابي وطرق ايجاده Arithmetic Mean
المتوسط الحسابي للقيم المتجمعة
المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة

= الوسيط أو الأوسط Median
الوسيط للقيم المتجمعة
الوسيط بالرسم

= المنوال أو الشائع Mode
المنوال بالطريقة الحسابية
المنوال بالرسم

= مقارنة بين المتوسطات الثلاث .

= العلاقة بين المتوسطات الثلاث .



المتوسطات أو القيم المركزية

يهتم الباحث دائما أن يعبر عن قيم المجموعة التي يشملها البحث بقيمة واحدة تمثلها ، وتؤدي المتوسطات هذا الغرض في البحث ، فأية قيمة مركزية يمكن أن تستعمل لأي غرض من أغراض التوضيح أو المقارنة . وأهم هذه المتوسطات وأكثرها شيوعا في البحوث ما يأتي :

١ ــ المتوسط الحسابي Arithmetic Mean

٢ ــ الوسيــط Median

٣ ــ المنوال أو الشــائع Mode

١) المتوسط الحسابي :

يستعمل المتوسط الحسابي كثيرا في حياتنا اليومية ، فهو الطريقة المباشرة التي نلجأ اليها عند مقارنة مجموعتين ، فاذا طبقنا اختبارا في مادة من المواد العلمية على فصلين أو مجموعتين وأردنا بعد ذلك أن نقرر أيهما أقوى ، تبادر الى الذهن لأول وهلة أن نستخرج متوسط درجات كل مجموعة ثم نقارن بين هذين المتوسطين .

ومتوسط عدد من القيم هو خارج قسمة مجموع هذه القيم على عددها . فاذا كانت أعمار ثلاثة أشخاص هي على الترتيب ٢٥ ، ٣٠ ، ٤١ كان متوسط أعمارهم = $\frac{٢٥ + ٣٠ + ٤١}{٣}$ = ٣٢ . ولعله من الواضح أن هذا المتوسط الحسابي لا يشترط أن يكون دائماعددا صحيحا ، كما أنه دائما محصور بين أقل القيم وأعلاها. ولكن هذا ليس معناه أنه يقع في الوسط تماما بين هذين الحدين ، فهذا يتوقف على القيم الأخرى . ولكن الذي يحدث دائما أن المجموع الجبري لانحراف القيم عن هذا المتوسط يكون دائما صفرا . ففي

مثال أعمار الأشخاص الثلاث يكون مجموع الانحرافات عن المتوسط الحسابي معادلا ـ ٧ ـ ٢ + ٩ = صفرا وتنطبق هذه الصفات كلها على المتوسط الحسابي لأي عدد من القيم مهما كان هذا العدد كبيرا .

المتوسط الحسابي للقيم المتجمعة في جدول تكراري :

الصعوبة التي تصادفنا في القيم المتجمعة على هيئة فئات هي أن قيم الأفراد جميعها لا تكون معروفة لدينا . فاذا كان لدينا مثلا عدد من المبالغ المقسمة على فئتين الأولى فيها من ١٠ الى أقل من عشرين ريالا وعددها ٤ مبالغ ، والثانية من ٢٠ ريالا الى أقل من ٣٠ ريالا وعددها ٦ مبالغ ، وأردنا أن نستخرج المتوسط الحسابي لهذه المبالغ فان الصعوبة التي تواجهنا هي جهلنا لقيم أفراد كل فئة . اذ أن كل ما نعرفه عن كل فرد منها أنه محصور بين قيمتين معينتين .

والطريقة المتبعة في مثل هذه الحالة أن نفترض قيما متساوية لكل أفراد الفئة الواحدة ، بأن نعطي كل فرد في الفئة قيمة هي مركز الفئة أي القيمة المتوسطة فيها ، فنعطي أفراد الفئة من ١٠ — أقل من ٢٠ قيمة واحدة مقدارها ١٥ وأفراد الفئة من ٢٠ ـ أقل من ٣٠ قيمة واحدة مقدارها ٢٥ ريالا ، فيكون مجموع قيم أفراد الفئة الأولى حسب هذا الفرض = ١٥ × ٤ = ٦٠ ، ومجموع قيم أفراد الفئة الثانية = ٢٥ × ٦ = ١٥٠ ، ويكون المجموع الكلي للقيم العشرة = ٦٠ + ١٥٠ = ٢١٠ ، وعلى ذلك فيكون متوسطها $= \frac{٢١٠}{١٠} = ٢١$.

ويمكن الحصول على مركز الفئة باحدى الطريقتين الآتيتين : ـ

اما بجمع الحد الأدنى للفئة على الحد الأدنى للفئة التي بعدها وقسمة حاصل الجمع على ٢ ، أو باضافة نصف مدي الفئة الى حدها الأدنى ، واليك تطبيق على ذلك في الجدول التكراري الآتي وهو يبين توزيع الأجر اليومي بالريال لخمسمائة عامل في مصنع :

فئات الأجر اليومي	التكرار ك	مراكز الفئات س	مراكز الفئات× التكرار (س × ك)
١٦ —	٨٢	١٨	١٤٧٦
٢٠ —	٩٥	٢٢	٢٠٩٠
٢٤ —	٤٢	٢٦	١٠٩٢
٢٨ —	٣٧	٣٠	١١١٠
٣٢ —	٣٢	٣٤	١٠٨٨
٣٦ —	٣٥	٣٨	١٣٣٠
٤٠ —	٣٣	٤٢	١٣٨٦
٤٤ —	٢٦	٤٦	١١٩٦
٤٨ —	٢٨	٥٠	١٤٠٠
٥٢ —	٢٤	٥٤	١٢٩٦
٥٦ —	٣١	٥٨	١٧٩٨
٦٠ —	١٥	٦٢	٩٣٠
٦٤ —	٢٠	٦٦	١٣٢٠
المجموع	٥٠٠		١٧٥١٢

جدول (١٤) المتوسط الحسابي لأجور خمسمائة عامل

فيكون المتوسط الحسابي لهذه الأجور = $\frac{١٧٥١٢}{٥٠٠}$ = ٣٥,٠٢ ريالا.

ونلاحظ أن هذا الجدول التكراري يعبر عن ٥٠٠ حالة مختلفة مجمعة على هيئة مجموعات ، ولا ننتظر أن المتوسط الحسابي الذي نحسبه لهذا الجدول المتجمع في فئات ينطبق دائما انطباقا تاما على المتوسط الحسابي الذي نستخرجه من قيم الحالات الخمسمائة كل على حدة . ولكن الفرق بين المتوسطين لن يكون كبيرا اذا قيس بالاختصار الكبير في كمية الجهد والوقت .

ونستطيع أن نلخص طريقة حساب المتوسط الحسابي لكل من البيانات المتفرقة والبيانات المتجمعة في جدول تكراري كالآتي :

في حالة البيانات المتفرقة $م = \frac{مجـ س}{ن}$

على اعتبار أن (م) هو المتوسط الحسابي ، (مجـ س) معناه مجموع القيم . حيث (س) أية قيمة في هذه البيانات و (ن) عدد القيم .

وفي حالة البيانات المتجمعة في جدول تكراري –

$$م = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك}$$

حيث (س) في هذه الحالة تعبر عن مركز الفئة و (ك) تكرار الفئة .

المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة :

اذا أردنا حساب المتوسط الحسابي لأطوال ٢٠ شخصا فالطريقة الطبيعية هي قياس هذه الأطوال وجمعها ثم قسمة حاصل الجمع على ٢٠ . ويمكن أن نختصر العمل قليلا اذا كانتأطوالهم محصورة بين ١٤٥ سم، ١٨٥ سم مثلافيمكننا أن نضع مستوى خاصا وليكن ١٦٠ سم نقيس بالنسبة له ونعطي لكل شخص قيمة سالبة أو موجبة حسب نقص طوله أو زيادته عن هذا المستوى الخاص ، وبذلك نستعمل في حسابنا أعدادا صغيرة ، وبحساب المجموع الجبري لهذه الفروق وقسمتها بعد ذلك على ٢٠ نحصل على فرق المتوسط الحسابي عن ارتفاع ١٦٠ سم ، واليك مثالا على ذلك :

الأطوال	الفروق	الأطوال مرتبة	الفروق
١٥٥	— ٥	١٤٥	— ١٥
١٧٥	١٥	١٤٧	— ١٣
١٨٠	٢٠	١٤٨	— ١٢
١٨٥	٢٥	١٤٩	— ١١
١٦٥	٥	١٥٠	— ١٠
١٥٠	— ١٠	١٥٠	— ١٠
١٨٤	٢٤	١٥٢	— ٨
١٧٦	١٦	١٥٥	— ٥
١٤٥	— ١٥	١٥٥	— ٥
١٥٠	— ١٠	١٦٠	—
١٤٨	— ١٢	١١٠	—
١٥٥	٥	١٦٢	٢
١٦٠	—	١٦٥	٥
١٧٠	١٠	١٧٠	١٠
١٧٥	١٥	١٧٥	١٥
١٥٢	— ٨	١٧٥	١٥
١٤٧	— ١٣	١٧٦	١٦
١٤٩	— ١١	١٨٠	٢٠
١٦٠	—	١٨٤	٢٤
١٦٢	٢	١٨٥	٢٥
٣٢٤٣			١٣٢ — ١٨٩ ٤٣

جدول (١٥) المتوسط الحسابي لقيم متفرقة بالطريقة المختصرة

فيكون المتوسط الحسابي بالطريقة المباشرة العادية = $\frac{٣٢٤٣}{٢٠}$ = ١٦٢,١٥ سم

وبالطريقة المختصرة = ١٦٠ + $\frac{٤٣}{٢٠}$ = ١٦٢,١٥ سم .

ويلاحظ أن ترتيب القيم يساعد كثيرا في حساب الفروق كما هو موضح في جدول (١٧) ، فاذا أردنا تطبيق هذه الطريقة لحساب المتوسط الحسابي لقيم مصنفة في جدول تكراري كان علينا أن نختار قيمة نبدأ منها حساب القيم نعتبرها نقطة الصفر في الجدول ، ثم نحسب انحراف مراكز الفئات المختلفة عن هذه القيمة الاعتبارية التي نختارها ، وبذلك نتخلص من الأعداد الكبيرة التي يشملها حساب المتوسط الحسابي – ونظرا لأن الفئات تتابع في الجداول التكرارية بانتظام فيمكن اعطاء درجات منتظمة مثل ١ ، ٢، ٣ ......،

٢ ، ٣ .. لتعبر عن مدى انحراف مركز الفئة عن الأساس الفرضي الذي سبق اختياره ، ثم نبني كل حسابنا للمتوسط على هذه الدرجات المنتظمة ، ثم نضرب المجموع الجبري لهذه الانحرافات الفرضية في مدى كل فئة لينتج الانحراف الحقيقي للمتوسط الحسابي عن القيمة الاعتبارية (التي يمكن أن نعبر عنها بمركز الفئة الصفرية) التي حسب الانحراف عنها .

وخطوات الطريقة موضحة في المثال الآتي وهو يبين توزيع درجات ٢٠٠ شخص في اختبار الشطب :

الفئـات (ف)	التكـرار (ك)	ح —	ك ح —
٢٠٤ —	٤	— ٤	— ١٦
١٠٨ —	٥	— ٣	— ١٥
١١٢ —	١٦	— ٢	— ٣٢
١١٦ —	٢٣	— ١	— ٢٣
١٢٠ —	٥٢	صفر	—
١٢٤ —	٤٩	١	٤٩
١٢٨ —	٢٧	٢	٥٤
١٣٢ —	١٥	٣	٤٥
١٣٦ —	٧	٤	٢٨
١٤٠ —	٢	٥	١٠
المجموع	٢٠٠		١٨٦ — ٨٦ ١٠٠

جدول (١٦) المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة

(العمود ح — يمثل الانحراف الفرضي للفئات عن الفئة الصفرية)

مركز الفئة الصفرية = $\frac{١٢٠ + ١٢٤}{٢}$ = ١٢٢ وهي القيمة التي حسب منها انحراف الفئـات .

المتوسط الحسابي = ١٢٢ $\frac{(١٠٠ \times ٤)}{٢٠٠}$ حيث ٤ هي مدى كل فئة = ١٢٢ + ٢ = ١٢٤

وستطيع أن نضع هذه النتيجة في صورة رمزية كالآتي :

$$م = م\ صفر + \frac{مج\ (ك \cdot \overline{ح})}{مج\ ك} \times ف$$

أي أن المتوسط الحسابي = مركز الفئة الصفرية +

$$\frac{\text{مجموع حواصل ضرب الانحراف الفرضي للفئات × تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}} \times \text{مدى الفئة}$$.

ولسهولة العمل يحسن أن تختار الفئة الصفرية في وسط الجدول وتكون كبيرة التكرار حتى تتفادى استعمال الأعداد الكبيرة بقدر الامكان

ويجب أن تؤدي هذه الطريقة الى نفس الجواب الذي تؤدي اليه الطريقة العادية ، كما يجب أن تؤدي الى نفس الجواب مهما تغير اختيار موضع الفئة الصفرية . فاذا طبقناها مثلا على الجدول ١٤ كانت كالآتي :

فئات الأجر	ك	$\overline{ح}$	ك $\overline{ح}$
١٦ -	٨٢	- ٤	- ٣٢٨
٢٠ -	٩٥	- ٣	- ٢٨٥
٢٤	٤٢	٢	٨٤
٢٨	٣٧	- ١	٣٧
٣٢	٣٢	صفر	
٣٦	٣٥	١	٣٥
٤٠	٣٣	٢	٦٦
٤٤ -	٢٦	٣	٧٨
٤٨	٢٨	٤	١١٢
٥٢	٢٤	٥	١٢٠
٥٦	٣١	٦	١٨٦
٦٠	١٥	٧	١٠٥
٦٤	٢٠	٨	١٦٠
مجموع	٥٠٠		٢٨٦ - ٧٣٤ ١٢٨

جدول (٠٧) تطبيق الطريقة المختصرة على جدول (١٤)

$$\text{المتوسط الحسابي} = م + \frac{مج (\bar{ح}\ ك)}{مج\ ك} \times ف$$

$$= ٣٤ + \frac{١٢٨}{٥٠٠} \times ٤ = ٣٥.٢$$

المتوسط الحسابي في حالة القيم المتقطعة :

لا تختلف طريقة المتوسط الحسابي في هذه الحالة عنها في حالة القيم المتصلة الا في عدم وجود الفئات : وعلى ذلك نتخذ القيمة المعطاة بدلا من مركز الفئة كما نعتبر مدى الفئة هنا (١) ولتوضيح ذلك نستخدم الجدول الآتي الذي يبين توزيع عدد الأبناء في العائلات :

عدد الأبناء في العائلة	عدد العائلات ك	ح –	ك . ح –
صفر	٣	– ٤	– ١٢
١	٧	٣	– ٢١
٢	١١	– ٢	– ٢٢
٣	١٤	– ١	– ١٤
٤	٢٠	صفر	–
٥	١٦	١	١٦
٦	١٢	٢	٢٤
٧	٧	٣	٢١
٨	٥	٤	٢٠
٩	٣	٥	١٥
١٠	٢	٦	١٢
المجموع	١٠٠		١٠٨ – ٦٩ ٣٩

جدول (١٨) المتوسط الحسابي للقيم المتقطعة

فيكون المتوسط الحسابي = ٤ + $\frac{٣٩}{١٠٠}$ = ٤,٣٩ فقد اتخذنا القيمة المقابلة للصفر بدلا من مركز الفئة في الجداول التكرارية للقيم المتصلة.

٢) الوسيـــط أو الأوسط :

القيمة الوسيطية في مجموعة من القيم هي تلك القيمة التي يكون عدد القيم الأخرى التي أقل منها معادلا لعدد القيم الأخرى الأعلى منها ولمعرفة القيمة الوسيطية يتعين علينا أن نرتب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا فتكون القيمة التي تقع في المنتصف تماما هي القيمة الوسيطية — فالقيمة الوسيطية في القيم السبعة الآتية مثلا : ٤٥ ، ٣٢ ، ٢٥ ، ٥٩ ، ٤٨ ، ٦٨ ، ٥٠ يمكن تحديدها بعد ترتيب القيم كالآتي: ٢٥ — ٣٢ — ٤٥ — ٤٨ — ٥٠ — ٥٩ — ٦٨ وتكون القيمة الوسيطية هي الرابعة في الترتيب حيث يكون هناك ثلاث قيم أقل منها ، وهي في هذا المثال ٤٨ . ومن هذا يتضح أن من الواجب تحديد ترتيب القيمة الوسيطية أولا . وهنا نجد أمامنا حالتين مختلفتين : (أولا) اذا كان عدد القيم فرديا (ثانيا) اذا كان عدد القيم زوجيا.

وترتيب الوسيط في الحالة الأولى يمكن معرفته مباشرة بقسمة عدد الأفراد زائدا واحد على ٢ ، أي اذا كان (ن) فرديا كان ترتيب الوسيط $\frac{ن + ١}{٢}$ أما اذا كان عدد الأفراد زوجيا كما في حالة القيم المرتبة الآتية ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٣ ، ٥٧ ، ٦٩ ، ٧٠ فاننا لا نجد قيمة واحدة ينطبق عليها وصف الوسيط ، وفي هذه الحالة نجد أمامنا وسيطين لا وسيطا واحدا وهما : ٤٣ ، ٥٧ فهناك قيمتان قبلهما وقيمتان بعدهما ، ونستطيع أن نحصل على وسيط واحد بايجاد متوسط هذين الوسيطين $\frac{٤٣ + ٥٧}{٢}$ أي ٥٠ .

الوسيط للقيم المتجمعة في جدول تكراري :

الجدول الآتي يبين توزيع درجات اختبار ذكاء لخمسين طفلا :

فئـــات الدرجات	التكـــرار	
٢٤ –	٣	
٢٦ –	٨	
٢٨ –	٩	٢٠
٣٠ –	١٠	
٣٢ –	٦	
٣٤ –	٤	
٣٦ –	٥	
٣٨ –	٣	٢٠
٤٠ –	—	
٤٢ –	٢	

جدول (١٩) الوسيط في الجدول التكراري

فاذا أردنا معرفة الوسيط لهذه الدرجات كان علينا أولا أن نحدد رتبته ، وهي في حالة الجداول التكرارية للقيم المتصلة $\frac{ن}{٢}$ أي $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ في هذه الجداول، ويلاحظ أنه يقع في الفئة (٣٠ –) لأن عدد القيم التي قبلها ٢٠ وتكرار هذه الفئة ١٠ ، أي أننـــا للحصول على ترتيب الوسيط لا يمكننا أن نتخطى هذه الفئة ، كما أننا نلاحظ أن القيم التي بجميع الفئات التي تزيد على هذه الفئة عددها ٢٠ أيضا مما يدلنا على أن الوسيط يقع في منتصف هذه الفئة تماما أي أنه يعادل ٣١ .

من هذا المثال يتضح لنا أننا محتاجون لمعرفة التكرار المتجمع لتحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط ، ونستطيع حسابه بعد ذلك سواء لجأنا الى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل كما في المثال الآتي :

الحدود العليا للفئات	التكرار (ك)	التكرار المتجمع الصاعد (ك)
أقل من ١٥	—	—
أقل من ٢٥	١٨	١٨
أقل من ٣٥	٣٢	٥٠
أقل من ٤٥	٤٠	٩٠
أقل من ٥٥	٥٠	١٤٠
أقل من ٦٥	٣٠	١٧٠
أقل من ٧٥	٢٥	١٩٥
أقل من ٨٥	١٥	٢١٠
أقل من ٩٥	٢٠	٢٣٠
أقل من ١٠٥	١٠	٢٤٠
أقل من ١١٥	١٠	٢٥٠
المجموع	٢٥٠	

جدول (٢٠) الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد

في هذا المثال نجد أن :

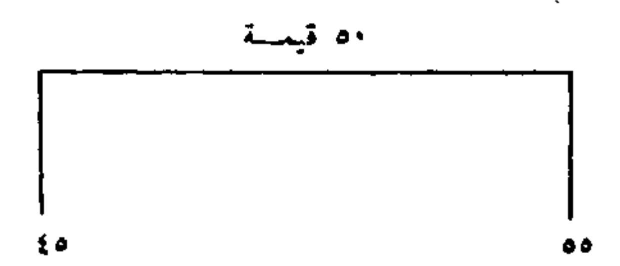
$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{٢٥٠}{٢} = ١٢٥$$

أي أن الفئة الوسيطية هي الفئة (٤٥ ــ أقل من ٥٥) ويكون ترتيب الوسيط في هذه الفئة ١٢٥ ــ ٩٠ = ٣٥ ومن الواضح أن قيمته تزيد عن ٤٥ ، الا أنها لا تصل الى ٥٥ ولكنها تقترب من القيمة ٥٥ كلما زاد ترتيب الوسيط في فئته .

واذا نظرنا الى الفئة الوسيطية وجدنا تكرارها ٥٠ أي أن بها ٥٠ قيمة موزعة بين القيمتين ٤٥ ، ٥٥ أي في مدى ١٠ ويكون موضع قيمة الوسيط من هذا المدى $\frac{٣٥}{٥٠}$ أي

أن قيمته تزيد على الحد الأدنى للفئة وهو ٤٥ بقيمة تساوي ١٠ × $\frac{٣٥}{٥٠}$ أي أن قيمته =

٤٥ + ٧ = ٥٢



ومن هذا نستنتج أن :

قيمة الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطية +

$$\frac{\text{رتبة الوسيط – التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{مدى الفئة}$$

$$و = د_و + \frac{ر_و - ك_{و-١}}{ك_و} \times ف$$

حيث $د_و$ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية .

$ر_و$ = رتبة الوسيط

، ك تعبر عن التكرار المتجمع ، $ك_{و-١}$ = التكرار المتجمع للفئة قبل الوسيطية

، $ك_و$ = تكرار الفئة الوسيطية .

، ف = مدى الفئة .

واذا اتبعنا التكرار المتجمع النازل لا بد أن نحصل على نفس النتيجة كما يلي :

الحدود السفلى للفئات	التكـــرار	التكرار المتجمع النازل
١٥	١٨	٢٥٠
٢٥	٣٢	٢٣٢
٣٥	٤٠	٢٠٠
٤٥	٥٠	١٦٠
٥٥	٣٠	٢١٠
٦٥	٢٥	٨٠
٧٥	١٥	٥٥
٨٥	٢٠	٤٠
٩٥	١٠	٢٠
١٠٥	١٠	١٠
١١٥	—	—
المجموع	٢٥٠	

(جدول ٢١) الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل

مما سبق اتضح أن مرتبة الوسيط في هذا المثال ١٢٥ ، أي أنه لو رتبنا الفئة الوسيطية تنازليا كان ترتيب الوسيط في فئته ١٢٥ — ١١٠ = ١٥ وتكون قيمته أقل من ٥٥ بطبيعة الحال . ونلاحظ أن تكرار هذه الفئة وهو ٥٠ موزع في مدى الفئة كلها أي على ما يعادل قيمته ١٠ ، أي أن الوسيط تقل قيمته عن ٥٥ بمقدار $\frac{١٥}{٥٠} \times ١٠ = ٥٢$.

فاذا استخدمنا التكرار المتجمع النازل كان القانون الذي نستخدمه في الحل كالآتي :

$$و = ع_و - \frac{ر_و - ك' - ١}{ك_و} \times ف$$

، $ع_و$ في هذه الحالة تعبر عن الحد الأعلى للفئة الوسيطية :

و يمكن ايجاد الوسيط برسم المنحنى المتجمع الصاعد أو النازل للتكرارات كما هي أو للنسب المئوية لتكرار الفئات بالنسبة للتكرار الكلي .

الا أن هذه الطريقة قلما تؤدي الى النتيجة الدقيقة للوسيط ، نظرا لصعوبة رسم المنحنى المتجمع بالطريقة العادية ، وطريقة ايجاده بهذه الطريقة تنحصر في استخدام المنحنى لتحديد القيمة المقابلة لرتبته فنرسم خطا أفقيا عند هذا الترتيب أو عند ٥٠ في حالة رسم المنحنى المتجمع المئوي وننزل عمودا عند تقابل هذا الخط مع المنحنى فيكون موقع العمود مع المحور الأفقي المعبر عن الفئات ممثلا لقيمة الوسيط . هذا ولزيادة الدقة يحسن رسم المنحنيين معا الصاعد والنازل فتكون نقطة تقابلهما (اذا كان الرسم دقيقا دقـة كافية) مقابلة لرتبة الوسيط على المحور الرأسي ولقيمته على المحور الأفقي .

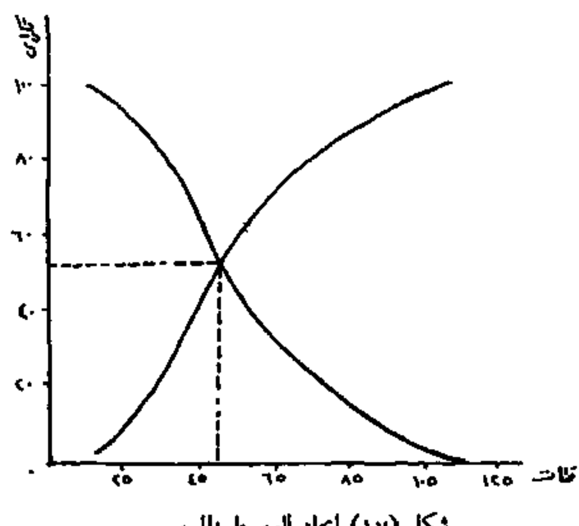
والجدول الآتي يبين التكرارات المتجمعة المئوية :

الحدود العليا للفئات	التكرار المئوي المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للفئات	التكرار المئوي المتجمع النازل
أقل من ١٥	صفر	١٥	١٠٠,—
أقل من ٢٥	٧,٢	٢٥	٩٢,٨
أقل من ٢٥	٢٠,—	٣٥	٨٠,—
أقل من ٤٥	٣٦,—	٤٥	٦٤,—
أقل من ٥٥	٥٦,—	٥٥	٤٤,—
أقل من ٦٥	٦٨,—	٦٥	٣٢,—
أقل من ٧٥	٧٨,—	٧٥	٢٢,—
أقل من ٨٥	٨٤,—	٨٥	١٦,—
أقل من ٩٥	٢٩,—	٩٥	٨,—
أقل من ١٠٥	٩٦,—	١٠٥	٤,—
أقل من ١١٥	١٠٠,—	١١٥	صفـــر

جدول (٢٢) جدول مئوي متجمع صاعد

جدول (٢٣) جدول مئوي متجمع نازل

ومن هذين الجدولين يمكن رسم المنحنيين المتجمعين وتعيين قيمة الوسيط كما يأتي :



شكل (١٧) ايجاد الوسيط بالرسم

الوسيط للقيم المتقطعة :

لايجاد الوسيط للقيم المبينة في جدول (٢٤) تتبع الخطوات العادية كما يلي :

عدد الأبناءفي العائلة	عدد العائلات(التكرار)	التكرار المتجمع الصاعد
صفر	٣	٣
١	٧	١٠
٢	١١	٢١
٣	١٤	٣٥
٤	٢٠	٥٥
٥	١٦	
٦	١٢	
٧	٧	
٨	٥	
٩	٣	
١٠	٢	
المجمـــوع	١٠٠	

جدول (٢٤) الوسيط للقيم المتقطعة

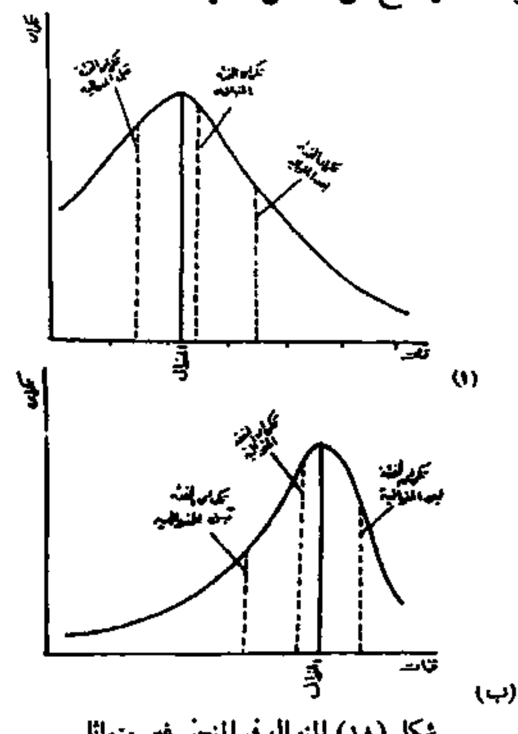
نلاحظ أن الوسيط الذي رتبته في هذا الجدول $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ يكون عند القيمة (٤) فيكون الوسيط هو (٤) مباشرة دون الحاجة الى عمليات حسابية كما هو الحال في القيم المتصلة .

٣ ــ المنوال الشائع :

المنوال في أية مجموعة هو القيمة التي تعتبر أكثر القيم شيوعا : وعلى ذلك فتحديده يتوقف على تكرار القيم في المجموعة .

ويمكن ايجاده باحدى الطرق الآتية ، ثلاث منها حسابية وطريقتان بالرسم .

١ ــ أبسط طريقة تقريبية تكون باعتبار المنوال في الجدول التكراري مركز الفئة ذات أكبر تكرار ، فاذا طبقنا ذلك على جدول (٢٥) كان المنوال لهذا التوزيع وهو مركز الفئة (٤٥ ــ) ، ذلك لأن تكرارها ٥٠ وهو أكبر من أي تكرار آخر لأية فئة ، أي أنه يســاوي ٥٠ . وواضح أن هذه الطريقة تقريبية ، فهي تفترض تماثل التوزيع على جانبي مركز الفئة المنوالية بينما نرى في الحقيقة أن موضع المنوال في الفئة المنوالية يتوقف على شكل المنحنى أو التوائه كما يتضح من الشكل الآتي :



شكل (١٨) المنوال في المنحنى غير متماثل

٢ ـ طريقة حسابية ثانية :

بعد تحديد فئة المنوال تنحصر الصعوبة في تحديد قيمته في مدى هذه الفئة ، ففي المنوال السابق كما ذكرنا سابقا ، يقع المنوال في الفئة (٤٥ ـ) أي أن قيمته تزيد على ٤٥ بمقدار نسبة خاصة في مدى الفئة وهو ١٠ هذه النسبة تتوقف على تكرار الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية ، فاذا كان تكرار الفئة بعد المنوال أكبر من تكرار الفئة التي قبلها انحرف المنوال نحو القيم الكبيرة في هذا الجدول والعكس بالعكس ، أما اذا كان التكراران متساويين وقع المنوال في منتصف الفئة تماما .أي أن مدى الفئة وهو ١٠ سيقسم تقسيما تناسبيا بنسبة حدها تكرار الفئتين المحيطتين للفئة المنوالية أي ٣٠ : ٤٠ في المثال .

وعلى ذلك تكون قيمته $= ٤٥ + ١٠ \times \frac{٣٠}{٧٠} = ٤٥ + ٤,٢٩$

$= ٤٩,٢٩$

أي ان المنوال $= د_{ن} + \frac{ك_{ن+١}}{ك_{ن+١} + ك_{ن-١}} \times ف$

= الحد الأدنى للفئة المنوالية +

$$\frac{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية}}{\text{تكرار الفئة المنوالية + تكرار الفئة قبل المنوالية}} \times \text{مدى الفئة}$$

على اعتبار أن :

$د_{ن}$ = الحد الأدنى للفئة المنوالية

، $ك_{ن+١}$ = تكرار الفئة بعد المنوالية

، $ك_{ن-١}$ = تكرار الفئة قبل المنوالية

، ف = مدى الفئة

٣ ـ طريقة الفـــروق :

واضع هذه الطريقة هو كارل بيرسون ، وهي لا تختلف كثيرا عن سابقتها فهي

تهتم بالفروق بين التكرارات أكثر مما تهتم بالتكرارات نفسها ، ذلك لأن الخطوة الأولى في هذه الطريقة تنحصر في ايجاد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئتين اللتين حولها كما يــأتي :

فئات	تكرار	فروق
٣٥ –	٤٠	١٠
٤٥ –	٥٠	
٥٥ –	٣٠	٢٠

جدول (٢٥) ايجاد المنوال بطريقة الفروق

ووضع المنوال يتحدد في هذه الطريقة بالفرق بين تكرار الفئتين حول الفئة المنوالية وتكرار الفئة المنوالية .

فهو يساوي ٤٥ + $\frac{١٠}{٣٠}$ × ١٠ أي تقسيم مدى الفئة وهو ١٠ بنسبة ١٠ : ٢٠ .

فهو = ٤٥ + ٣,٣٣ = ٤٨,٣٣ .

أي أن المنوال حسب هذه الطريقة = $د_{ن} + \frac{ك_{ن} - ك_{ن-١}}{(ك_{ن} - ك_{ن-١}) + (ك_{ن} - ك_{ن+١})} \times ف$

المنوال في الجدول التكراري لقيم متقطعة .

لو رجعنا الى جدول (٢٤) لوجدنا أن أكبر تكرار في الجدول هو عند القيمة (٤) أي أن أكبر عدد من العائلات بها (٤) أبناء وعلى ذلك يكون المنوال هو ٤ مباشرة دون الحاجة الى عمليات حسابية كما هو الحال في القيم المتصلة .

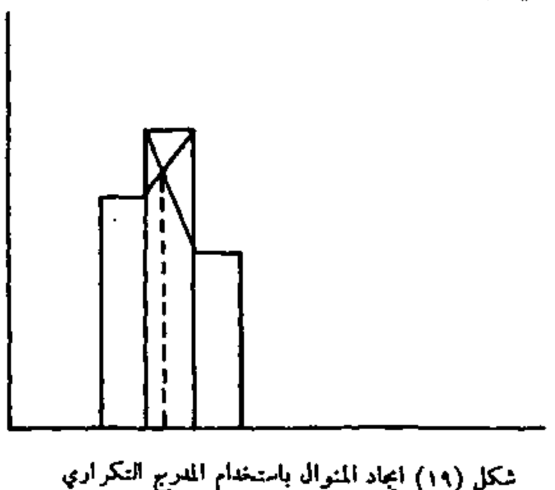
٤ – طريقة المنحنى التكراري :

لايجاد المنوال يمكن أن نستخدم الرسم بأن نرسم منحنيا ، فتكون قمة هذا المنحنى مقابلة للقيمة التي تعبر عن منوال المجموعة .

الا أن هذه الطريقة تقريبية جدا ، لأن المنحنى التكراري عادة يرسم نتيجة لمحاولة شخصية ، حيث يعمل الباحث على أن يمر المنحنى بأكبر عدد ممكن من النقطة وأن يقترب ما أمكن من باقي النقط الأخرى .

٥ ـ طريقة المدرج التكراري :

يستخدم المدرج التكراري كذلك لايجاد منوال التوزيع كما في الرسم الآتي ، وفي هذه الحالة لا تكون هناك ضرورة لرسم المدرج التكراري كله ، بل يكتفي برسم الفئة المنوالية والفئتين المحيطتين بها .



شكل (١٩) ايجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري

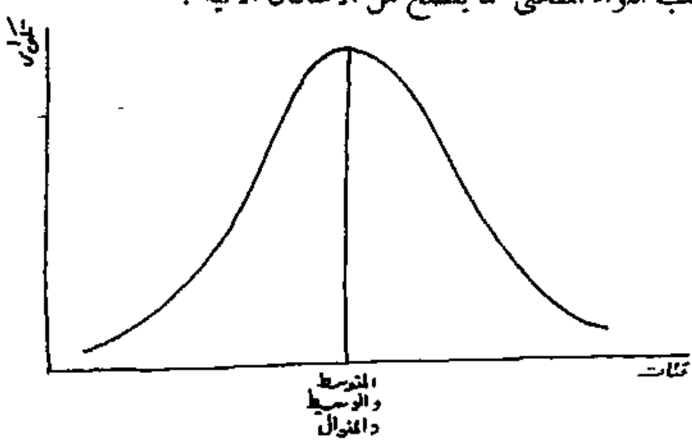
فالطريقة تكون بتوصيل أطراف المستقيم العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بأطراف مستقيمي الفئتين التي قبلها والتي بعدها ، فتكون نقطة التقابل هي المقابلة للمنوال ، فاذا أسقطنا عمودا من نقطة التقابل على المحور الأفقي كان موقعه قيمة المنوال .

مقارنة بين المتوسطات الثلاثة :

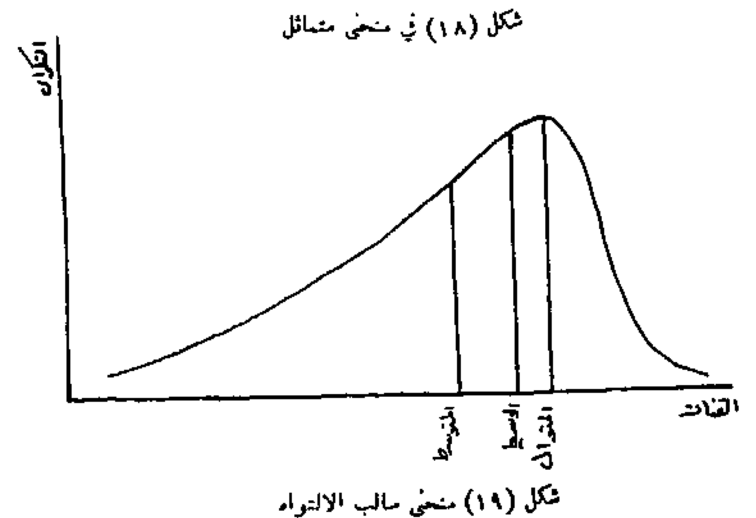
يلاحظ أن المتوسط الحسابي يستغل في حسابه جميع القيم ، ولذا فهو أدق المتوسطات الثلاثة التي ذكرت ، كما أنه أكثر ثباتا أي أنه لا يختلف اختلافا كبيرا باختلاف العينات المختارة ، الا أنه كثيرا ما يحدث أن تشتمل المجموعة على قيم متطرفة لا تمثل المجموعة ، كأن يكون في أحد الفصول مثلا عدد قليل من التلاميذ الضعاف عن المستوى العام للفصل . فالمتوسط الحسابي في هذه الحالة لا بد وأن تتأثر قيمته بهذه الحالات المتطرفة ، كما أنه في حالات الجداول التكرارية المفتوحة يتعذر حساب المتوسط الحسابي ، حيث لا يكون من الممكن معرفة مركز الفئة المفتوحة التي يتطلبها الحساب ، في مثل هذه الحالات

نضطر الى الاستعانة اما بالوسيط أو المنوال فكلاهما لا يتأثران بالقيم المتطرفة . ذلك لأن حسابهما ينحصر في القيم والتكرارات المتوسطة . كما أنه يمكن ايجادهما اذا ما كان الجدول مفتوحا من أحد طرفيه أو كليهما .

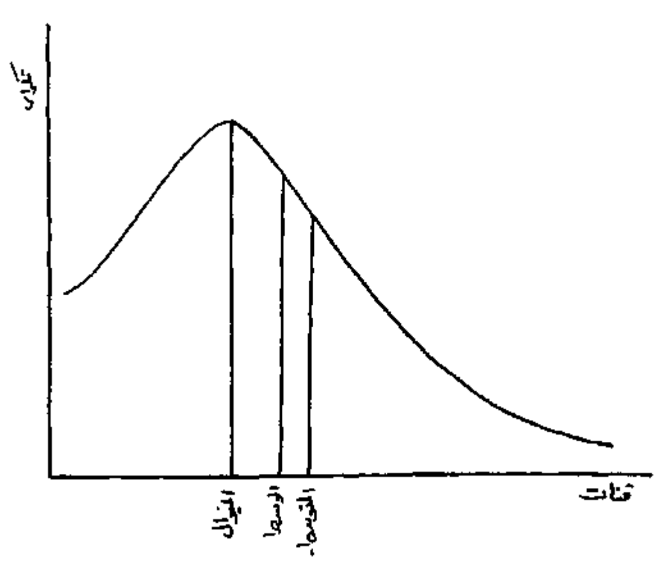
وفي حالة التوزيع المتماثل نجد أن قيم هذه المتوسطات الثلاثة واحدة أي أنها تكون متطابقة . ولكنها تختلف فيما عدا ذلك . فالمتوسط الحسابي في التوزيعات الملتوية يتجه عادة ناحية الطرف الملتوي (المدبب) . فهو يمثل مركز الثقل بالنسبة للمجموعة ، ذلك لأن مجموع القيم يكون متعادلا على جانبيه أما الوسيط فانه يقع عند منتصف المساحة التي يمثلها التوزيع ، أي أن مجموع عدد القيم (التكرارات) يكون متساويا على جانبيه ، وأما المنوال فهو يحدد أعلى نقطة في منحنى التوزيع ولذلك فان موضع هذه المتوسطات الثلاثـة يختلف حسب التواء المنحنى كما يتضح من الأشكال الآتية :



شكل (١٨) في منحنى متماثل



شكل (١٩) منحنى سالب الالتواء



منحنى موجب الالتواء

شكل (٢٠) المواضع النسبية للمتوسط الحسابي والوسيط والمنوال

ويمكن تلخيص الحالات التي يفضل فيها كل من هذه المتوسطات الثلاث فيما يأتي : —

يفضل المتوسط الحسابي في الحالات الآتية :

١ — اذا أريد الحصول على معامل على أكبر قدر من الثبات .

٢ — اذا أريد الحصول على معامل يمكن استخدامه في معاملات أخرى ، كمقاييس التشتت أو مقاييس الدلالة ، وهذه سيأتي توضيحها في الأبواب القادمة .

٣ — اذا كان توزيع المجموعة التي نبحثها متماثلا حول المراكز أو قريبا من الاعتدالي .

ويفضل الوسيط في الحالات الآتية :

١ — اذا أريد الحصول على معامل في وقت قصير .

٢ — اذا كان التوزيع ملتويا التواء واضحا ، وخاصة اذا كان بالتوزيع قيم متطرفة جداً .

٣ ـ اذا كان البحث يهتم بمعرفة ما اذا كانت قيمة معينة تقع في النصف العلوي أو السفلي من التوزيع .

٤ ـ اذا كان جدول التوزيع مفتوحا .

يفضل المنوال في الحالات الآتية :

١ ـ اذا أريد الحصول على معامل مركزي في أقصر وقت ممكن دون الاهتمام كثيرا بالدقة في حسابه .

٢ ـ اذا كان هدف الباحث معرفة القيمة التي يتفق فيها أغلب أفراد المجموعة .

العلاقة بين المتوسطات الثلاثة :

تمكن الاحصائيون من ايجاد علاقة تقريبية بين المتوسطات الثلاثة : المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال . وتستخدم هذه العلاقة عند ما يتعذر استخراج احدها . كما يحدث عند ما يراد ايجاد المتوسط الحسابي مثلا في جدول تكراري مفتوح .

ويمكن وضع هذه العلاقة على الصورة الآتية :

المتوسط الحسابي ـ المنوال = ٣ (المتوسط الحسابي ـ الوسيط) أي أن الفرق بين المتوسط الحسابي والمنوال يعادل ثلاثة أمثال الفرق بين المتوسط الحسابي والوسيط .

ويمكن من هذه العلاقة الحصول على قيمة أي من هذه المتوسطات اذا عرف الاثنان الآخران .

فالمتوسط الحسابي = $\frac{٣}{٢}$ الوسيط ـ $\frac{١}{٢}$ المنوال

والوسيط = $\frac{١}{٣}$ المنوال + $\frac{٢}{٣}$ المتوسط الحسابي .

والمنوال = ٣ × الوسيط ـ ٢ × المتوسط الحسابي .

أسئلة على الباب الثـاني

١ – فيما يأتي درجات ٦٠ شخصا في اختبار لذاكرة الأشكال :

٧٥	٤٦	—	٣٨	٢٤	٧٠	٩٢
٣٢	٦٤		٢٩	١٧	٨٥	٤٩
٢٥	٧٥		٦٤	٢٨	٢٥	٥٥
٥٤	٨٢		٢٥	٣٥	٣٣	٤٦
٨٢	٨٤		٣٦	٦٠	٩٠	٧٢
١٥	٧٣		٤٤	٥٢	٤٥	٨٤
٢٦	٢٥		١٥	٣٤	٥٢	٥٠
٣٤	٣٦		٩٦	٥٧	٢٦	٦٤
٤٧	٤٤		٢٧	٣٢	٤٨	٧٢
٨٢	٧٦		٨٩	٦٠	٧٠	٨٣

احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات ، ثم فرغها في جدول تكراري ، واحسب المتوسط الحسابي من هذا الجدول ، (ابدأ الجدول بالدرجة ١٥ متخذا مدى كل فئة خمس درجات) وقارن بين الناتجين .

٢ – احسب الوسيط في الجدول التكراري الذي حصلت عليه في المسألة السابقة بالطريقة الحسابية . ثم عن طريق المنحنى المتجمع وقارن بين الناتجين .

٣ – استخرج المنوال في الجدول التكراري السابق بمساعدة القانون الذي يبين العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال . ثم قارن بين القيمة التي تحصل عليها وبين قيمته بأية طريقة أخرى .

٤ — مجموعتان من الأشخاص أعمار أفرادهما موزعة حسب الجدول الآتي :

أعمـــار	تكرار المجموعة أ	تكرار المجموعة ب
٢٤ —	٦	٧
٢٩ —	٧	٨
٣٤ —	٨	٩
٣٩ —	١٠	١٦
٤٤ —	١٢	٢٠
٤٩ —	١٥	١٨
٥٤ —	٢٣	١٩
٥٩ —	١٦	١١
٦٤ —	١٠	١٣
٦٩ —	١٢	٧
٧٤ —	٣	٣
٧٩ —	٣	٢
المجموع	١٢٨	١٣٩

جدول (٢٦) جدول تكراري لأعمار مجموعتين من الأشخاص

ما النسبة المئوية لعدد الأشخاص في مجموعة (أ) الذين تزيد أعمارهم عن وسيط أعمار المجموعة (ب) ؟

٥ — قارن بين منوالي أعمار المجموعتين مستعملا طريقة رسم المدرج التكراري في ايجاد المنوال .

٦ — احسب النسبة المئوية لعدد أفراد المجموعتين الذين تبلغ أعمارهم ٤٠ سنة فأكثر .

٧ — احسب النسبة المئوية لعدد الأفراد في المجموعتين الذين تقل أعمارهم عن ٦٠ سنة.

٨ — احسب المتوسط الحسابي في الجدول التكراري الآتي بأية طريقة تجدها مناسبة :

الفئـــــات	التكـــرار
أقل من ٢٠	١٦
٢٠ —	٢٢
٢٥ —	٢١
٣٠ —	٢٥
٣٥ —	٣٥
٤٠ —	٤٢
٤٥ —	٣٠
٥٠ —	٣٢
٥٥ —	٢٠
٦٠ —	٢٤
٦٥ —	٢٠
٧٠ —	١٥
المجموع	٣٠٢

جدول (٢٧)



الباب الثالث

مقاييس التشتت

= تشتت القيم .

= مقاييس التشتت .

المدى المطلق

نصف المدى الربيعي

الانحراف المتوسط

الانحراف المعياري

= مقارنة بين مقاييس التشتت .

= معامل الاختلاف .

= الدرجة المعيارية .

= الرتبة المئينية :



تشتت القيم :

ذكرنا أن فائدة المتوسطات وصف المجموعة بقيمة واحدة يستعاض بها عن عدد كبير من القيم هي التي تكون المجموعة ، ولذلك فمعرفتها ضرورية في حالات المقارنة بين قيم مجموعات مختلفة . ولكن هل يكفي أحد هذه المتوسطات كالمتوسط الحسابي مثلا لوصف قيم المجموعة وصفا كاملا وللمقارنة بين قيم مجموعة وأخرى ؟ ولنقرب السؤال الى الأذهان نضرب المثال الآتي :

مجموعتان من الأفراد اختبروا في اختبار قدرة خاصة .

فكانت درجات أفراد المجموعة الأولى هي صفر — ٢٥ — ٥٠

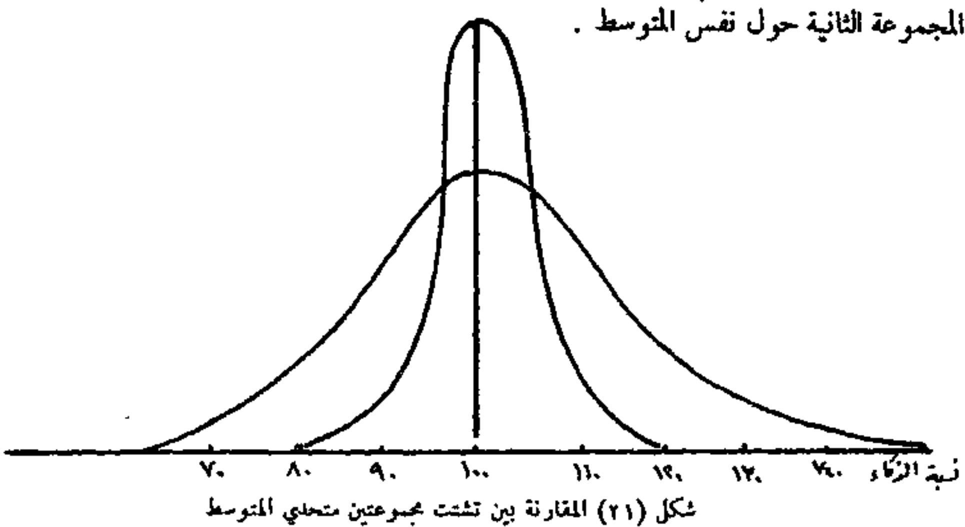
وكانت درجات أفراد المجموعة الثانية هي ٢٤,٥ — ٢٥ — ٢٥,٥

واضح أن المتوسط الحسابي لكل منهما واحد وهو ٢٥ ، فهل نستطيع القول بأن المجموعتين متعادلتان في هذه القدرة ؟ . من النظرة السطحية لهذه القيم ندرك لأول وهلة أن قيم المجموعة الأولى مبعثرة غير متقاربة ، بينما قيم المجموعة الثانية متقاربة جدا .

ومن هنا كان الباحث محتاجا دائما لأن يقرن ذكر قيمة متوسط القيم بقيمة أخرى توضح مدى تباعدها أو تقاربها بعضها عن بعض ، حتى يعطي صورة واضحة عن كل من النزعة المركزية لمختلف القيم في المجموعة ومدى اختلافها وتوزيعها . والوصف الأخير هو ما يعبر عنه بالتشتت dispersion و Scattered-spread ففي المثال السابق نقول ان قيم المجموعة الأولى أكثر انسجاما more homogeneous من المجموعة الأولى وأن المجموعة الأولى أكثر تباينا more heterogeneous ومعرفة التشتت تفيد كثيرا في الأغراض العلمية . فاذا عرف المدرس مدى تباين ذكاء تلاميذ فصله أمكنه أن يراعي ذلك في طرق تدريسه ، بحيث يجد أضعف تلميذ وأقوى تلميذ فيه مادة تناسبهما.

والرسم الآتي يوضح فكرة تشتت مجموعتين متساويتين من حيث متوسط القيم

وفيه مقارنة بين مجموعتين من التلاميذ . المجموعة الأولى تنحصر نسبة ذكاء أفرادهـا بين ٦٠ ، ١٥٠ والمجموعة الثانية تنحصر نسبة ذكاء أفرادها بين ٨٠ ، ١٢٠ ومن الرسم يتضح كيف تتشتت القيم حول المتوسط في المجموعة الأولى بينما تتجمع وتتقارب قيم المجموعة الثانية حول نفس المتوسط .



شكل (٢١) المقارنة بين تشتت مجموعتين متحدي المتوسط

مقاييس التشتت :

يحتاج الباحث عادة الى استخدام قيمة تعبر عن مدى تباعد القيم أو تقاربهـا في المجموعات التي يشملها البحث تماثل معاملات النزعة المركزية أو المتوسطات التي سبق الحديث عنها في الباب الثاني ، وأهم هذه المقاييس أو المعاملات ما يأتي :

١ — المدى المطلق Range

٢ — نصف المدى الربعي Semi-interquartile Range

٣ — الانحراف المتوسط Mean Deviation

٤ — الانحراف المعياري Standard Deviation

المـدى المطلـق :

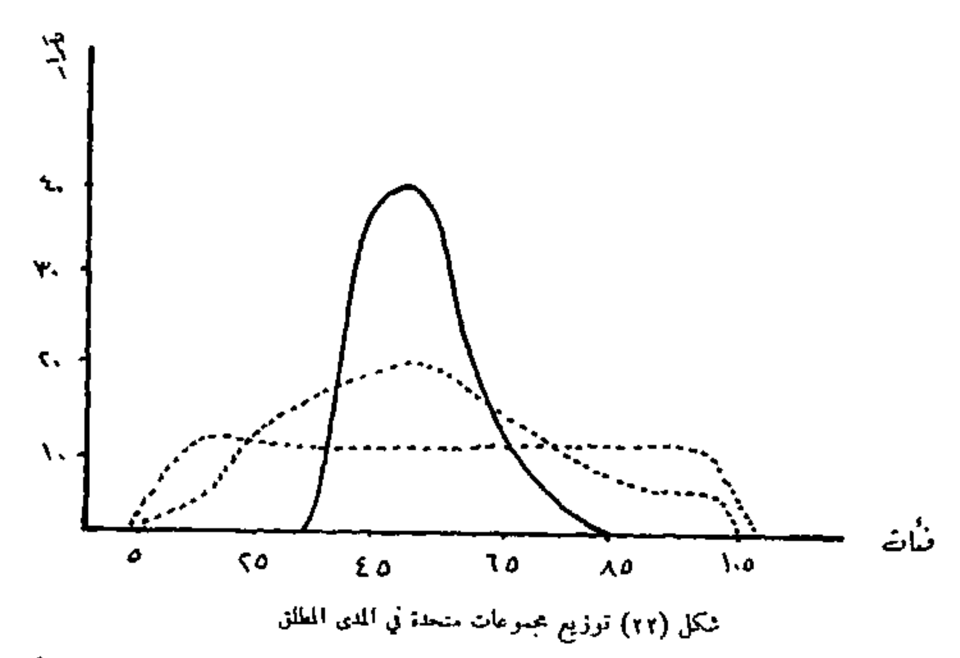
الوسيلة المباشرة لمعرفة مدى تقارب القيم أو تباعدها هي حساب الفرق بين أصغر قيم المجموعة وأكبرها ، وهي وسيلة سهلة الا أنها أقل الوسائل دقة وذلك لأن حساب هذا المعامل يتوقف على قيمتين فقط من قيم المجموعة ولا يهتم مطلقا بما بينهما من قيم أخرى .

وهاتان القيمتان تكونان عادة متطرفتين لا تمثلان المجموعة التي ينتميان اليها . فاذا حسبنا المدى المطلق لأعمار تلاميذ فصل . وكان بين تلاميذ الفصل تلميذ صغير وآخر كبير لدرجة تجعلهما شاذين بالنسبة لأفراد المجموعة ، كان المدى المطلق مقياسا خاطئا لدرجة كبيرة لتشتت هذه الأعمار . وفيما يلي ثلاث مجموعات ، القيمة السفلى في كل منها ٥ والقيمة العليـــا ١٠٠ .

فئات	تكرار	فئات	تكرار	فئات	تكرار
٥ —	١	٥ —	٣	٥ —	١٠
١٥ —	—	١٥ —	١٠	١٥ —	١٠
٢٥ —	—	٢٥ —	١٥	٢٥ —	١٠
٣٥ —	٣٥	٣٥ —	١٨	٣٥ —	١٠
٤٥ —	٤٠	٤٥ —	٢٠	٤٥ —	
٥٥ —	١٥	٥٥ —	٥	٥٥ —	١٠
٦٥ —	٨	٦٥ —	١٠	٦٥ —	١٠
٧٥ —	—	٧٥ —	٨	٧٥ —	١٠
٨٥ —	—	٨٥ —	٥	٨٥ —	١٠
٩٥ —	١	٩٥ —	٦	٩٥ —	١٠
المجموع	١٠٠	المجموع	١٠٠	المجموع	١٠٠

جدول (٢٨) جدول (٢٩) جدول (٣٠)

أي أن المدى المطلق لكل منها = ١٠٠ ــ ٥ = ٩٥ . ولكن الفرق واضح بين مدى تباعد أو تقارب القيم فيها ، فقيم المجموعة الأولى أقلها انتشارا ذلك لأن تجمع القيم حول المتوسط أكثر في المجموعة الأولى منها في الثانية وفي الثانية أكثر منها في الثالثة ، فكأن المدى المطلق لا يعطي دلالة واضحة لمدى انتشار وتوزيع القيم كما يتضح ذلك من الشكل الآتي :



شكل (٢٢) توزيع مجموعات متحدة في المدى المطلق

فالمدى المطلق لا يصلح الا اذا أراد الباحث أن يأخذ فكرة سريعة عن التشتت . الا أن استخدامه والاعتماد عليه قد يؤديان الى أخطاء ، وخاصة اذا كان هناك انفصال بين الفئات المتطرفة وباقي الفئات كما هو الحال في المجموعة الأولى .

نصف المدى الربيعي :

كان أهم عيب في المدى المطلق أنه يهتم بالقيمتين المتطرفتين ، مهملا ما عداهما من القيم ، وأن هاتين القيمتين قد تكونان منفصلتين عن باقي أفراد المجموعة . ولذلك فان الاجراء الطبيعي لتلافي ذلك أن تحذف الجزءين المتطرفين من المجموعة ونقصر حسابنا على الجزء المتوسط من القيم ، وفي هذه الطريقة التي نحن بصددها الآن نكتفي بالاهتمام بالنصف المتوسط لقيم المجموعات مهملين الربع الأول والربع الأخير . فالقيمتان اللتان تهتم بهما هذه الطريقة هما القيمة التي يقل عنها ربع عدد أفراد المجموعة فقط والقيمة التي يزيد عنها ربع أفراد المجموعة فقط ، فاذا عددنا أفراد المجموعة مبتدئين بأقلها قيمة حتى نصل الى ربع أفراد المجموعة كانت النقطة التي نصل اليها بهذه الطريقة هي الربيع الأدنى ،و اذا عددنا أفراد المجموعة مبتدئين بأكبرها قيمة حتى نصل الى ربع أفراد المجموعة كانت النقطة التي نصل اليها بهذه الطريقة هي الربيع الأعلى أو الربيع الثالث . وتبعا لهذا يكون الوسيط هو الربيع الثاني . فلكل مجموعة أربعة أرباع ولكن لها ثلاثة ربيعات . والفرق بين الربع والربيع أن الربع جزء من المجموعة . أما الربيع فهو نقطة تحدد نهاية الربع ، فنستطيع أن نقول ان احدى القيم تقع في الربع الأول ولكننا لا نستطيع

أن نقول انها تقع في الربيع الأول ولكن يمكن أن نصفها بأنها تقع عند الربيع الأول .
ويرمز للربيع الأدنى عادة بالرمز ر١ (Q_1) وللربيع الثاني ر٢ (Q_2) والربيع الثالث ر٣ (Q_3) .واذا قصرنا حسابنا على المدى بين الربيعين الأول والثالث ضمنا بقدر الامكان استبعاد القيم المتطرفة التي قد تكون بعيدة عما يمثل قيم المجموعة .

ولحساب نصف المدى الربيعي ينبغي علينا أولا أن نحسب كل من الربيعين الأول والثالث فيكون الفرق بينهما هو المدى الربيعي .

أي أن المدى الربيعي = ر٣ — ر١

ويكون نصف المدى الربيعي الذي يرمز له عادة بالرموز س = (ر٣ — ر١) / ٢

وطريقة ايجاد الربيعين لا تختلف عن طريقة ايجاد الوسيط بعد معرفة رتبة كل منهما واليك توضيح الطريقة عمليا في الجدول التكراري الآتي وهو يمثل درجات مجموعة من الطلبة في مادة الاحصاء :

الفئات	التكرار	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد	
٢٠ —	—	٢٥	—	
٢٥ —	٤	٣٠	٤	
٣٠ —	١٢	٣٥	١٦	
٣٥ —	١٣	٤٠	٢٩	
٤٠ —	١٥	٤٥	٤٤	فئة الربيع الأول
٤٥ —	٢٣	٥٠	٦٧	
٥٠ —	٢٧	٥٥	٩٤	
٥٥ —	٢٠	٦٠	١١٤	
٦٠ —	١٥	٦٥	١٢٩	فئة الربيع الأعلى
٦٥ —	١٢	٧٠	١٤١	
٧٠ —	١٠	٧٥	١٥١	
٧٥ —	٥	٨٠	١٥٦	
٨٠ —	٥	٨٥	١٦١	
٨٥ —	٣	٩٠	١٦٤	
المجموع	١٦٤			

جدول (٣١) نصف المدى الربيعي

رتبة الربيع الأول = ١٦٤ ÷ ٤ = ٤١

رتبة الربيع الثالث = ١٦٤ − ٤١ = ١٢٣ [١]

الربيع الأول = ٤٠ + ٥ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ٤٤

الربيع الثالث = ٦٠ + ٥ × $\frac{٩}{١٥}$ = ٦٣

نصف المدى الربيعي = $\frac{٦٣ - ٤٤}{٢}$ = ٩.٥

وخطوات العمل في هذه الطريقة كما يأتي :

(١) أوجد رتبة الربيعين فرتبة الربيع الأول هي $\frac{ن}{٤}$ على اعتبار أن « ن » هي عدد قيم المجموعة أو مجموع التكرارات .

ورتبة الربيع الثالث هي $\frac{ن}{٤}$ × ٣ أو يمكن حسابها بطرح رتبة الربيع الأول من عدد قيم المجموعة .

(٢) أوجد قيمتي الربيعين بنفس الطريقة التي سبق استخدامها في الوسيط .

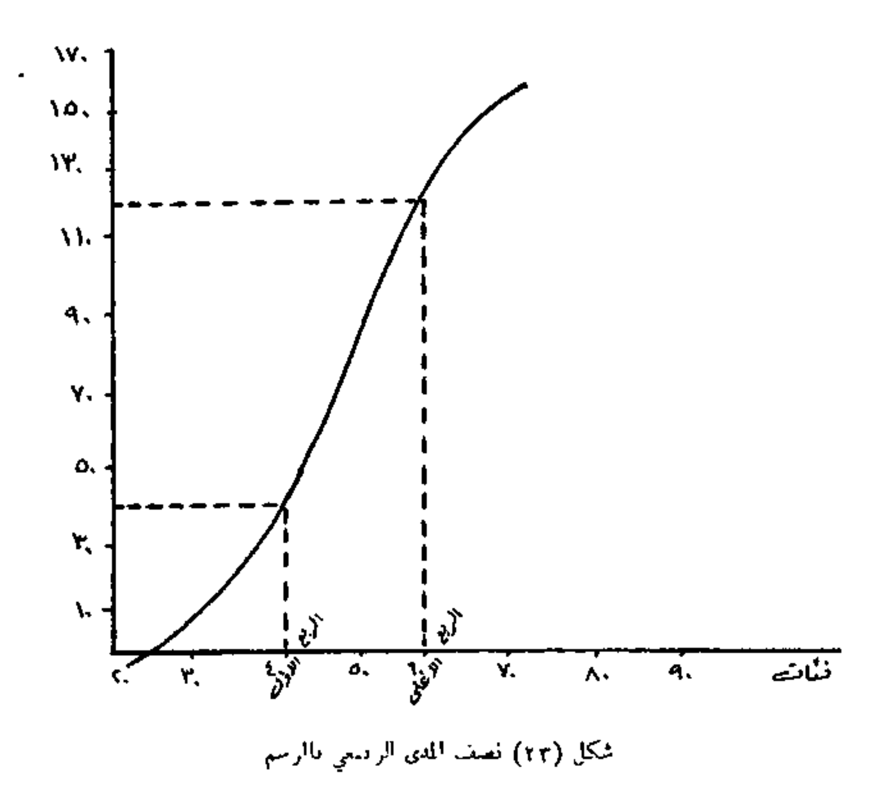
(٣) أوجد نصف المدى الربيعي بالطريقة الآتية :

$$س = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

وكما أمكننا معرفة الوسيط عن طريق رسم المنحنى التجمعي نستطيع هنا أيضا اتباع نفس الطريقة لمعرفة قيمتي الربيعين كما في الشكل الآتي :

---

(١) ويمكن الحصول على الربيع الثالث على اعتبار انه اول ربيع في التكراري المتجمع النازل اي يمكن استخدام التكرارين المتجمعين بحيث يحسب في كل منهما الربيع الاول .



شكل (٢٣) نصف المدى الربيعي بالرسم

الانحــراف المعيــاري Standard Deviation :

يعتبر الانحراف المعياري أهم معاملات التشتت جميعا وأكثرها استعمالا ، وهو قريب في خطوات ايجاده من الانحراف المتوسط . فهو يختلف عنه في طريقة التخلص من اشارات الفروق بين القيم والمتوسط الحسابي ، فبينما تتخلص من هذه الاشارات في طريقة الانحراف المتوسط باهمال الاشارات كلية نحتال على ذلك في طريقة الانحراف المعياري بتربيع هذه الفروق أي بضربها في نفسها . فتصبح جميع الاشارات موجبة .

فلايجاد الانحراف المعياري للقيم السبعة الآتية :

٣١ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤٤ ، ٢٢ ، ٣٧ ، ٣٥

نستخرج أولا متوسطها الحسابي وهو $\frac{٢٣٨}{٧} =$ ٣٤

ثم نسير بعد ذلك في الخطوات الموضحة في الجدول الآتي :

القيمة	انحرافها عن المتوسط	مربع الانحراف عن المتوسط
٣٥	١	١
٣٧	٣	٩
٢٢	١٢ —	١٤٤
٤٤	١٠	١٠٠
٣٠	٤ —	١٦
٣٩	٥	٢٥
٣١	٣ —	٩
	١٩	
٢٣٨	١٩ —	٣٠٤

جدول (٣٢) طريقة ايجاد الانحراف المعياري لقيم مفردة

متوسط مربعات الانحراف $= \frac{٣٠٤}{٧} = ٤٣,٤٣$

الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحراف = ٦.٥٩

ويطلق على متوسط مربعات الانحرافات اسم التباين variance ويطلق على الجذر التربيعي للتباين اسم الانحراف المعياري . فالانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي .

واذا جمعت القيم على هيئة فئات في جدول تكراري نضطر لايجاد مركز كل فئة واتخاذه كمثل لقيم الفئة جميعها .

والمثال الآتي يوضح طريقة ايجاد الانحراف المعياري.

فئات ف	مراكز الفئات س	التكرار	ح̅	كح̅	ح	ك ح	ك ح ٢
٨ —	٩	٥	٤ —	٢٠ —	٩ —	٤٥ —	٤٠٥
١٠ —	١١	١٢	٣ —	٣٦ —	٧ —	٨٤ —	٥٨٨
١٢ —	١٣	١٥	٢ —	٣٠ —	٥ —	٧٥ —	٣٧٥
٤ —	١٥	١٨	١ —	١٨ —	٣ —	٥٤ —	١٦٢
١٦ —	١٧	١٥	—	—	١ —	١٥ —	١٥
١٨ —	١٩	١٧	١	١٧	١	١٧	١٧
٢٠ —	٢١	١٩	٢	٣٨	٣	٥٧	١٧١
٢٢ —	٣٣	١١	٣	٣٣	٥	٥٥	٢٧٥
٢٤ —	٢٥	٩	٤	٣٦	٧	٦٣	٤٤١
٢٦ —	٢٧	٩	٥	٤٥	٩	٨١	٧٢٩
المجموع		١٣٠		١٦٩ ١٠٤— ٦٥		٢٧٣ ٢٧٣—	٣١٧٨

جدول (٣٣) الانحراف المعياري للجدول التكراري

المتوسط الحسابي = ١٧ + $\frac{٦٥}{١٣٠}$ × ٢ = ١٨

فيكون الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٣١٧٨}{١٣٠}}$ = ٤,٩٤

وتكون خطوات العمل اذن كما يلي :

١ — احسب المتوسط الحسابي وقد حسب في هذا المثال بالطريقة المختصرة .

٢ — أوجد انحراف مركز كل فئة عن هذا المتوسط (ح̅) (العامود السادس في الجدول) .

وبعد هاتين الخطوتين أمامك طريقتان تؤديان لنفس النتيجة : اما أن نتبع ما يأتي :

٣ — ربع كل انحراف (ح ٢) .

٤ — أوجد حاصل ضرب كل مربع في تكرار الفئة (ك ح^{2})

أو كما اتبع في الجدول الموضح عليه (جدول ٣٣)

٣ — أوجد حاصل الضرب لكل انحراف في تكرار الفئة (ك ح) (العامود السابع)

٤ — اضرب حاصل الضرب السابق مرة ثانية في الانحراف (ك ح × ح = ك ح^{2}) (العامود الثامن)

وفي كلتا الحالتين تكون الخطوة التالية هي :

٥ — أوجد مجموع حواصل الضرب الناتجة في الخطوة الرابعة (أي المجموع في العامود الثامن) .

٦ — اقسم المجموع الذي حصلت عليه في الخطوة الخامسة على مجموع التكرارات (ن) .

٧ — أوجد الجذر التربيعي لخارج القسمة الأخير فيكون هذا الجذر هو قيمة الانحراف المعياري (ع)

$\therefore$ ع = $\sqrt{\frac{\text{مجـ ك ح}^{2}}{\text{ن}}}$ على اعتبار أن ع ترمز الى الانحراف المعياري .

ايجاد الانحراف المعياري بالطريقة المختصرة :

يمكن اختصار الخطوات الكثيرة في الطريقة السابقة باستعمال معادلة رياضية تساعد على تقليل العمليات الحسابية اللازمة . ففي المثال السابق كان المتوسط الحسابي — لحسن الحظ — عددا صحيحا وهذا نادر الحدوث في البحوث العلمية الواقعية . فاذا كان المتوسط الحسابي عددا كسريا كانت الانحرافات كلها كذلك أعدادا كسرية فتزداد العملية استنفادا للجهود والوقت نظرا لما تحتاجه الى عمليات ضرب وتربيع لأعداد كسرية . والطريقة المختصرة لا تزيد في خطواتها عن خطوات ايجاد المتوسط الحسابي للجدول التكراري الا خطوة واحدة يمكن استخراج الانحراف المعياري بعدها بقانون رياضي . واليك تطبيق هذه الطريقة في نفس الجدول السابق على سبيل المقارنة .

الفئات ف	التكرار ك	ح̄	ك ح̄	ك ح̄²
٨ –	٥	– ٤	– ٢٠	٨٠
١٠–	١٢	– ٣	– ٣٦	١٠٨
١٢–	١٥	– ٢	– ٣٠	٦٠
١٤–	١٨	– ١	– ١٨	١٨
١٦–	١٥	صفر	—	—
١٨–	١٧	١	١٧	١٧
٢٠–	١٩	٢	٢٨	٧٦
٢٢–	١١	٣	٣٣	٩٩
٢٤–	٩	٤	٣٦	١٤٤
٢٦–	٩	٥	٤٥	٢٢٥
المجموع	١٣٠		١٦٩ – ١٠٤ ٦٥	٨٢٧

جدول (٢٤) الانحراف المعياري بالطريقة المختصرة

فالخطوة الأخيرة كما يظهر من الجدول تنحصر في استعمال الانحراف الفرضي (ح̄) وايجاد (ك ح̄²) بدلا من ايجاد الانحرافات الحقيقية عن طريق استعمال المتوسط الحسابي الحقيقي للمجموعة . ومدى اختصار هذه الطريقة يتضح اذا عرفنا أن أغلب الحالات التي يطلب فيها ايجاد الانحراف المعياري تستلزم أيضا ايجاد المتوسط الحسابي وبذلك يكون كل ما يتطلبه ايجاد الانحراف المعياري بعد ذلك هو خطوة واحدة جديدة .

وطريقة حساب الانحراف المعياري بعد ذلك كما يأتي :

$$\text{الانحراف المعياري} = ٢ \sqrt{\frac{٨٢٧}{١٣٠} - \left(\frac{٦٥}{١٢٠}\right)^{٢}}$$

$$= ٢ \sqrt{٦{,}٣٦ - ٠.٢٥}$$

$$= ٤{,}٩٤$$

وخطوات العمل تبعا لما سبق تزيد خطوة واحدة على خطوات العمل في ايجاد المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة وهي ايجاد مجـ ك ح ــ ٢ وذلك بضرب أعداد العمودين الآخرين (ح ــ ، ك ح ــ) .

وقانون ايجاد الانحراف المعياري كما يأتي :

$$\text{ف} \sqrt{\frac{\text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}}{\text{ن}}\right)^{2}}$$

على اعتبار أن ف مدى الفئة .

والذي يزيد من سهولة هذه الطريقة أن $\frac{\text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}}{\text{ن}}$ يستخدم في ايجاد المتوسط الحسابي فلا يحتاج الى عملية جديدة في الحالات التي يطلب فيها ايجاد المعاملين .

الانحراف المعياري القيم المتقطعة Discrete values :

سبق أن أوضحنا طريقة ايجاد المتوسط الحسابي لمثل هذه القيم وبينا أنها لا تختلف عن الطريقة المتبعة في حالة الجداول المحتوية على فئات من القيم المتصلة الا في اتخاذ القيمة المعطاة بدلا من مركز الفئة واعتبار مدى الفئة (١) وهذا هو نفس الفرق أيضا في ايجاد الانحراف المعياري كما يتضح ذلك من الجدول الآتي ، وهو نفس الذي حسب له المتوسط الحسابي في جدول (٢٤) .

عدد الأبناء في العائلة	التكـــرار عدد العائلات ك	ح̄	ح̄ ك	ح̄² ك
صفر	٣	– ٤	– ١٢	٤٨
١	٧	– ٣	– ٢١	٦٣
٢	١١	– ٢	– ٢٢	٤٤
٣	١٤	– ١	– ١٤	١٤
٤	٢٠	صفر	—	—
٥	١٦	١	١٦	١٦
٦	١٢	٢	٢٤	٤٨
٧	٧	٣	٢١	٦٣
٨	٥	٤	٢٠	٨٠
٩	٣	٥	١٥	٧٥
١٠	٢	٦	١٢	٧٢
المجموع	١٠٠		١٠٨ – ٦٩ ٣٩	٥٢٣

جدول (٣٥) الانحراف المعياري للقيم المتقطعة

∴ الانحراف المعياري = ١ × ٥,٢٣ – ٠.١٥ = ٢.٢٥

مقارنة بين مقاييس التشتت :

ذكرنا أن المدى المطلق هو أقل مقاييس التشتت دقة وثباتا ، وخاصة في حالة وجود قيم متطرفة لا تمثل المجموعة التي ينتمي اليها . وأوضحنا كذلك أن نصف المدى الربيعي يتلافى النقد الذي يوجه الى المدى المطلق باقتصاره على مدى النصف المتوسط من مجموعة القيم . الا أنه لا يتعرض الا لقيمتين هما الربيع الأدنى والربيع الأعلى فقط ، أمـــا الانحراف المتوسط والانحراف المعياري فطريقة حسابهما تتناول جميع قيم المجموعة ، ولكن الانحراف المعياري هو أكثر هذه المقاييس استعمالا نظرا لأنه يستخدم أيضا في كثير من الطرق الاحصائية الأخرى كما سيتضح ذلك فيما بعد

متى نستخدم المدى المطلق ؟

١ ــ عند ما يراد تحديد اتساع التوزيع أي المسافة بين أقل القيم وأكبرها .
٢ ــ اذا ضمن الباحث عدم وجود قيم متطرفة غريبة عن المجموعة .

متى نستخدم نصف المدى الربيعي ؟

١ ــ عندما يراد الحصول على مقياس تقريبي للتشتت في وقت قصير .
٢ ــ عندما تكون في المجموعة قيم متطرفة تشذ عن القيم العادية .
٣ ــ عندما يراد معرفة درجة تركز القيم حول الوسيط .
٤ ــ عندما يراد الحصول على مقياس للتشتت في جدول تكراري مفتوح .

متى نستخدم الانحراف المتوسط أو الانحراف المعياري ؟

١ ــ عندما يقصد اعطاء أوزان لجميع الانحرافات تبعا لقربها أو بعدها عن المتوسط الحسابي .
٢ ــ عندما يراد الحصول على معامل للتشتت على أكبر جانب من الدقة والثبات . ويفضل في هذه الحالة الانحراف المعياري .
٣ ــ واذا ما كان الهدف استخدام هذا المعامل في نواحي احصائية أخرى فان المعامل الذي يستخدم هو الانحراف المعياري . كما في حالة معاملات الارتباط أو مقاييس الدلالة التي سيأتي بيانها فيما بعد .

هذا ويجب أن نلاحظ أن هذه الطرق المختلفة لا تؤدي الى نتيجة عددية واحدة . ولذا فيجب الاحتياط عند المقارنة بين مجموعات مختلفة باستخدام معامل واحد فيها جميعا ، والا كانت المقارنة على أسس مختلفة مما يؤدي الى استنتاجات خاطئة . والمثال الآتي يوضح مدى اختلاف هذه المعاملات بعضها عن بعض . فالجدول التكراري الآتي يوضح توزيع ٢٠٠ قيمة أصغرها صفر وأكبرها ٩٠ وقد حسب لهذا الجدول كل من نصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والانحراف المعياري وأما المدي المطلق فيمكن معرفته مباشرة وهو : ٩٠ ــ صفر = ٩٠ .

الفئات	التكرار ك	التكرار المتجمع الصاعد	ح	ك ح	ك ح²	مراكز الفئات	|ح|	|ح|×ك
صفر	٥	٥	-٦	-٣٠	١٨٠	٤	٤٧,٠٤	٢٥٤,٢٠
٨-	١٢	١٧	-٥	-٦٠	٣٠٠	١٢	٣٩,٠٤	٤٦٨,٤٨
١٦-	١١	٢٨	-٤	-٤٤	١٧٦	٢٠	٣١,٠٤	٣٤١,٤٤
٢٤-	١٥	٤٣	-٣	-٤٥	١٣٥	٢٨	٢٣,٠٤	٣٤٥,٦٠
٣٢-	٢٠	٦٣	-٢	-٤٠	٨٠	٣٦	١٥,٠٤	٣٠٠,٨٠
٤٠-	٢٢	٨٥	-١	-٢٢	٢٢	٤٤	٧,٠٤	١٥٤,٨٨
٤٨-	٣٤	١١٩	صفر	—	—	٥٢	٠,٩٦	٣٢,٦٤
٥٦-	٢٥	١٤٤	١	٢٥	٢٥	٦٠	٨,٩٦	٢٢٤,٠٠
٦٤-	١٢	١٥٦	٢	٢٤	٤٨	٦٨	١٦,٩٦	٢٠٣,٥٢
٧٢-	١٨	١٧٤	٣	٥٤	١٦٢	٧٦	٢٤,٩٦	٤٤٩,٢٨
٨٠-	١٦	١٩٠	٤	٦٤	٢٥٦	٨٤	٣٢,٩٦	٥٣٧,٣٦
٨٨-	١٠	١٠٠	٥	٥٠	٢٥٠	٩٢	٤٠,٦٩	٤٠٩,٦٠
المجموع	٢٠٠			٢١٧ -٢٤١ -٢٤	١٦٣٤			٣٦٩٢,٨٠

جدول (٣٦) مقارنة بين معاملات التشتت

$$\text{المتوسط الحسابي} = ٥٢ - \frac{٣٤}{٢٠٠} \times ٨ = ٥١,٠٤\,.$$

$$\text{والانحراف المعياري} = ٨ \sqrt{\frac{١٦٣٤}{٢٠٠} - \left(\frac{٢٤}{٢٠٠}\right)^{٢}} = ٣٢,٨٥\,.$$

$$\text{والانحراف المتوسط} = \frac{٣٦٩٢٠٨٠}{٢٠٠} - ١٨,٤٦\,.$$

الربيع الأول = $٣٢ + \frac{٧}{٢٠} \times ٨ = ٣٤,٨$

الربع الأعلى = $٦٤ + \frac{٦}{١٢} \times ٨ = ٦٨,٠$

نصف المدى الربيعي = $\frac{٦٨٠٠ - ٣٤٠٨}{٢} = \frac{٣٣٠٢}{٢} = ١٦,٦$

فتكون المقاييس المختلفة كما هي في الجدول الآتي :

المدى المطلق = ٩٠	الانحراف المتوسط = ١٨,٤٦
نصف المدى الربيعي = ١٦,٦	الانحراف المعياري = ٢٢,٨٥

واختلاف هذه المقاييس في القيم أمر طبيعي ، لأن كلا منها ينظر الى التشتت من وجهة نظر خاصة . فكل من المدى المطلق ونصف المدى الربيعي ينظر الى اتساع التوزيع ، بينما الانحراف المعياري والانحراف المتوسط ينظران الى مدى التجمع أو تشتت القيم حول المتوسط . ولذا فاننا لو رجعنا الى شكل (٢١) لاحظنا أن التوزيعات متقاربة من حيث الاتساع بينما تختلف كثيرا من حيث تجمع القيم فيهما حول المتوسط .

ولذا كان من اللازم استخدام مقياس واحد من هذه لغرض المقارنة دائما .

معامل الاختلاف :

قد يضطر الباحث الى المقارنة بين تشتّي مجموعتين متماثلتين ، وقد يبدو أن الوسيلة لذلك هي حساب معامل من معاملات التشتت لكل من هاتين المجموعتين والمقارنة على هذا الأساس . ولبيان مدى خطأ هذه الطريقة نضرب المثال الآتي :

مجموعتان من الأشخاص احداهما من الأطفال والثانية من الكبار . أعمار كل منهما كما هو مبين في الجدولين التكراريين الآتيين . والمطلوب المقارنة بين تشتت أعمـــار المجموعتين .

فئات العمر	التكرار
٣ –	١
٤ –	٣
٥ –	٧
٦ –	٧
٧ –	١٦
٨ –	٢٢
٩ –	١٤
١٠ –	١١
١١ –	١٠
١٢ –	٥
١٣ –	٤
المجموع	١٠٠

جدول (٢٧) توزيع أعمار مائة طفل

فئات العمر	التكرار
٣٠ –	٥
٣٣ –	٥
٣٦ –	٨
٣٩ –	٥
٤٢ –	١٣
٤٥ –	٢٠
٤٨ –	١٣
٥١ –	١٠
٥٤ –	١١
٥٧ –	٤
٦٠ –	٦
المجموع	١٠٠

جدول (٢٨) توزيع أعمار مائة بالغ

ولنفرض أننا استخدمنا الانحراف المعياري لقياس التشتت في كل منهما كما يلي :

الفئــات	التكــرار ك	ح	ك ح	ك ح ٢
٣ —	١	٥ —	٥ —	٢٥
٤ —	٣	٤ —	١٢ —	٤٨
٥ —	٧	٣ —	٢١ —	٦٣
٦ —	٧	٢ —	١٤ —	٢٨
٧ —	١٦	١ —	١٦ —	١٦
٨ —	٢٢	صفر	—	—
٩ —	١٤	١	١٤	١٤
١٠ —	١١	٢	٢٢	٤٤
١١ —	١٠	٣	٣٠	٩٠
١٢ —	٥	٤	٢٠	٨٠
١٣ —	٤	٥	٢٠	١٠٠
المجموع	١٠٠		١٠٦ ٦٨ — ٣٨	٥٠٨

جدول (٣٩) الانحراف المعياري لاعمار مجموعه للاطفال

المتوسط الحسابي لأعمار مجموعة الأطفال ٨.٥ + ٠.٣٨ = ٨.٨٨ والانحراف المعياري

$= \sqrt{٥٫٠٨ - ١٤٫} = ٢.٢٢$

هذا بالنسبة لمجموعة الأطفال . أما في مجموعة البالغين فيكون حساب المتوسط والانحراف المعياري كالآتي :

الفئـــات	التكـــرار (ك)	ح	ك ح	ك ح²
٣٠ —	٥	٥ —	٢٥ —	١٢٥
٣٣ —	٥	٤ —	٢٠ —	٨٠
٣٦ —	٨	٣ —	٢٤ —	٧٢
٣٩ —	٥	٢ —	١٠ —	٢٠
٤٢ —	١٣	١ —	١٣ —	١٣
٤٥ —	٢٠	—	—	—
٤٨ —	١٣	١	١٣	١٣
٥١ —	١٠	٢	٢٠	٤٠
٥٤ —	١١	٣	٣٣	٩٩
٥٧ —	٤	٤	١٦	٦٤
٦٠ —	٦	٥	٣٠	١٥٠
المجموع	١٠٠		١١٢ ٩٢ — ٢٠	٦٧٦

جدول (٤٠) الانحراف المعياري لأعمار مجموعة البالغين

المتوسط الحسابي لأعمار مجموعة البالغين = ٤٦٫٥ + ٣ × ٠٫٢٠

= ٤٧٫١٠

والانحراف المعياري لأعمار المجموعة البالغين = ٣ $\sqrt{\text{٦٫٧٦} - \text{٠٫٠٤}}$

= ٧٫٧٧

وهذا يدل ظاهريا على أن تشتت أعمار مجموعة البالغين أكبر كثيرا من تشتت أعمار مجموعة الأطفال فهو يعادل ثلاثة أمثاله تقريبا ولكن معامل الاختلاف لا ينظر لمعامل التشتت نظرة مطلقة بل يشتمل على ايجاد النسبة المئوية بين معامل التشتت والمتوسط للقيم فهو يساوي .

$$\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{ع}{م} \times ١٠٠$$

فاذا حسبنا معامل الاختلاف لكل من المجموعتين كان لأعمار مجموعة الأطفال ٢٥ ولأعمار مجموعة البالغين ١٦.٥ ، أي أن معامل الاختلاف لأعمار الأطفال يزيد عن معامل الاختلاف لأعمار البالغين ، وسبب هذا أن القيم في المجموعة الأولى أصغر كثيرا على وجه العموم من قيم المجموعة الثانية .

ويفيد معامل الاختلاف في ناحية أخرى وهي حالات المقارنة بين تشتت مجموعات مختلفة الوحدات ، فاذا قارنا مثلا بين تشتت أعمار الأشخاص وايرادهم الشهري ، ، واستخدمنا للمقارنة الانحراف المعياري لكل ، فان تمييز الانحراف المعياري يكون من نوع الوحدات في كل من المجموعتين ، ومن الطبيعي أنه لا يمكن المقارنة بين قيمتين من وحدات مختلفة كالسنوات و الريالات مثلا ، ولكن معامل الاختلاف يعطينا دائما نسبة معامل التشتت الى المتوسط ، والنسبة دائما غير مميزة ، ولذا تكون المقارنة ممكنة . وعلى ذلك فان معامل الاختلاف هو الوسيلة الطبيعية التي تستخدم عادة للمقارنة بين تشتت المجموعات المختلفة . وهناك وسائل أخرى أكثر دقة سيأتي ذكرها في الأبـــواب القادمـــة .

ومن الواضح أننا لا نستطيع استخدام النسبة السابقة في حالة الجداول التكراريـــة المفتوحة ، حيث يتعذر استخراج كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ولذا فان معامل الاختلاف في هذه الحالات يكون

$$\frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الوسيط}} \times ١٠٠$$

الا أنه ينبغي أن نكون على حذر من عدم استعمال معامل الاختلاف على صورتيه في مقارنة واحدة ، فاذا أردنا مثلا أن نقارن بين تشتت مجموعة من القيم في جدول مفتوح وأخرى في جدول مغلق تعين علينا استخدام الصورة الثانية في كليهما ، ولا يصح مطلقا أن نستخدم احدى الطريقتين في احداهما والصورة الثانية في الأخرى ، وذلك لأن كلا من الصورتين تعطي معاملا مختلفا .

فمعامل الاختلاف على الصورة الثانية لجدول ٣٩ يمكن حسابه على الوجه الآتي : ـ

	الحدود العليا للفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
	٣	ـ	ـ
٣ ـ	٤	١	١
٤ ـ	٥	٣	٤
٥ ـ	٦	٧	١١
٦ ـ	٧	٧	١٨
٧ ـ	٨	١٦	٣٤ فئة الربيع الأدنى
٨ ـ	٩	٢٢	٥٦ فئة الوسيط
٩ ـ	١٠	١٤	٧٠
١٠ ـ	١١	١١	٨١ فئة الربيع الأعلى
١١ ـ	١٢	١٠	٩١
١٢ ـ	١٣	٥	٩٦
١٣ ـ	١٤	٤	١٠٠
المجموع		١٠٠	

جدول (٤١) معامل الاختلاف بالصورة الثانية

قيمة الربيع الأدنى $= ٧ + \frac{٧}{١٦} \times ١ = ٧,٤٤$

و قيمة الوسيط $= ٨ + \frac{١٦}{٢٢} \times ١ = ٨,٧٣$

، قيمة الربيع الأعلى $= ١٠ + \frac{٥}{١١} \times ١ = ١٠,٤٥$

فيكون نصف المدى الربيعي = $\frac{١٠.٤٥ - ٧.٤٤}{٢} = \frac{٣.٠١}{٢} = ١.٥١$

ويكون معامل الاختلاف = $\frac{١.٥١}{٨.٧٣} \times ١٠٠ = ١٧.٣٠$

بينما معامل الاختلاف بالصورة الأخرى = ٢٥ .

استخدام معامل الاختلاف في المقاييس النفسية والتربوية :

يعترض بعض النفسيين على استخدام معامل الاختلاف في المقارنة بين تشتت الدرجات في المقاييس النفسية والاختبارات التربوية على اعتبار أن هذه المقاييس لا يعرف لها صفر مطلق ويعطينا Garrett توضيحا على ذلك ما يأتي :

لنفرض أننا أجرينا اختبارا لغويا على مجموعة من الأفراد وكان متوسط الدرجات التي حصلوا عليها ٢٥ والانحراف المعياري لها ٥ ، فيكون معامل الاختلاف في هذه الحالة ٢٠ . ولنفرض أننا أضفنا الى هذا الاختبار ٣٠ سؤالا من السهولة لدرجة أن جميع أفراد المجموعة قد تمكن من حلها جميعا ، وبذلك نجد أن درجة كل فرد قد ارتفعت ٣٠ درجة ، وبالتالي يرفع متوسط الدرجات فيصبح ٥٥ . ولكن الانحراف المعياري بطبيعة الحال لن يتأثر بتلك الزيادة بل سيظل كما هو ٥ ، وسيهبط معامل الاختلاف نتيجة لذلك في الحالة الثانية هبوطا كبيرا اذ سيصبح ٩ ، ومن الطبيعي أننا نستطيع أن نضيف أي عدد من هذا النوع السهل من الأسئلة . وهكذا تتحكم درجة سهولة الأسئلة المضافة في تغيير معامل الاختلاف ، ومرجع هذا أننا لا نستطيع أن نحدد صفرا مطلقا يحدد لنا مبدأ القياس ، وهذا ما يدعو كثيرا من النفسيين الى التقليل من أهمية معامل الاختلاف في المقاييس النفسية والتربوية .

الا أن جاريت Garrett يرى أن هذا الاعتراض بالرغم من صحته لا يهدم الانتفاع بمعامل الاختلاف هدما كليا . وهو يرى أن عدم وجود صفر مطلق للمقاييس والاختبارات النفسية والتربوية هو العقبة في معاملات أخرى غير معامل الاختلاف ، ففي المثال السابق الذي ذكرنا فيه أنه اذا أضفنا ٣٠ سؤالا سهلا الى الاختبار فان معامل الاختلاف سيتغير تغيرا كبيرا نلاحظ كذلك أن المتوسط الحسابي سينتابه قدر كبير من التغير حيث تزيد قيمته بمقدار ٣٠ درجة (على اعتبار أن جميع الأفراد سيتمكنون من حل هذه الأسئلة)

ومع هذا فالمتوسط الحسابي يستخدم بدرجة كبيرة من الثقة في جميع البحوث . كما أن البحوث النفسية تشتمل في كثير من الأحيان على مقاييس عضوية موضوعية كالطول والعمر وزمن الرجع reaction time وسرعة التنفس والنبض ... الخ وهذه لا جدال في صحة استخدام معامل الاختلاف في المقارنة بين تشتتها .

وزيادة على ذلك فانه اذا استخدمنا مقياسا نفسيا واحدا للمقارنة بين تشتت مجموعتين في صفة نفسية خاصة فليس ما يمنع من استخدام معامل الاختلاف ما دام الصفر النسبي المتعلق بالاختبار واحدا في الحالتين . كما في حالة المقارنة بين تشتت ذكاء البنين وذكاء البنات باستخدام اختبار واحد للذكاء لكليهما . أو المقارنة بين تشتت الاتجاه العقلي لكل من المتعلمين والأميين باستخدام مقياس واحد لهذا الاتجاه ، ولكن الذي يعترض عليه هو المقارنة بين درجات اختبارين أو مقياسين مختلفين حتى ولو كانت المجموعة التي يطبق عليها كل من الاختبارين واحدة . كالمقارنة مثلا بين القدرة اللغوية والقدرة الحسابية لفصل من الفصول أو مجموعة من الأفراد .

الدرجـــة المعياريـــة Standard score :

اذا عرفنا أن تلميذا في فصل قد أخذ $\frac{٧٠}{١٠٠}$ في مادة من المواد فهل نستطيع أن نفهم مـــن ذلك مبلغ تقدمه أو تأخره بالنسبة لفصله ؟ الفكرة المباشرة التي قد تفهم عند سماع هذه الدرجة أن هذا التلميذ متفوق في هذه المادة . ولكن هذا الاستنتاج قد يكون بعيدا عن الصحـــة في بعض الأحيان . فقد يكـــون الامتحان الذي وضع لهذه المادة من السهولة لدرجة أن $\frac{٧٠}{١٠٠}$ كانت أقل درجة من درجات تلاميذ الفصل . فيكون ترتيب التلميذ بالنسبة لفصله في هذه المادة الأخير ، وقد يكون الأمر عكس ذلك تماما أي قد يكون الامتحان على درجة من الصعوبة بحيث أن أكبر درجة من درجات الفصل في هذا الاختبار كانت $\frac{٧٠}{١٠٠}$ ، أي أن هذا التلميذ في الحالة الثانية يكون ترتيبه الأول في المـــادة المختبرة ، وعلى ذلك فمجرد ذكر القيمة لا يكفي مطلقا لمعرفة مركزها في المجموعة التي تنتمي اليهـــا .

وقد يساعد على معرفة مركز القيمة بالنسبة للمجموعة ذكر المتوسط الحسابي للقيم

ومقارنتها به ، فاذا عرفنا أنه في الامتحان السابق كان متوسط الدرجات ٥٠ درجـــة أدركنا على الفور أن هذا التلميذ يقع في النصف المتقدم في الفصل ، اذ أنه يعلو عن هذا المتوسط بمقدار ٢٠ درجة ، ولكنا حتى بعد هذا لا نستطيع معرفة مركز هذا التلميذ في النصف العلوي من الفصل . أي مدى بعد القيمة ٧٠ عن المتوسط بالنسبة لقيم المجموعة ، ولذا يحتاج الباحث الى مقارنة مدى ارتفاع القيمة أو انخفاضها عن المتوسط أي الفرق بين القيمة والمتوسط بمقياس من مقاييس التشتت ، والطريقة المتبعة لذلك هي ايجاد النسبة بين هذا الفرق والانحراف المعياري ، ويطلق على النسبة الناتجة « الدرجة المعيارية » :

$$\text{فالدرجة المعيارية} = \frac{\text{القيمة} - \text{المتوسط}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

ومن الواضح أن هذه الدرجة قد تكون سالبة أو موجبة الاشارة حسب نقصها أو زيادتها عن المتوسط الحسابي ، وأن الدرجة المعيارية المقابلة للمتوسط الحسابي هي صفر . وبالرغم من أن وحدات المتوسط الحسابي والانحراف المعياري تكون من نوع وحدات القيم الأصلية ، فان كانت القيم نقودا بالريالات مثلا كان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ريالات كذلك ، الا أن الدرجة المعيارية نسبة لا تمييز لها ، فهي تعبر عن عدد مرات احتواء انحراف القيمة عن المتوسط على الوحدات من الانحراف المعياري : وهذا يجعل للدرجات المعيارية فائدة المقارنة بين مراكز القيم في مجموعاتها .

المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات المعيارية :

اذا تأملنا ما تساويه الدرجة المعيارية جبريا أدركنا أن المتوسط الحسابي لهذه القيم صفر ، وذلك لأن حاصل جمعها كذلك بصفر . لأن مجموع الدرجات المعيارية للقيم =

$$\frac{\text{مجموعها} - \text{المتوسط} \times \text{عددها}}{\text{الانحـــراف المعيـــاري}}$$

ومجموع القيم يساوي بطبيعة الحال (متوسطها × عددها)

ولزيادة الايضاح نسوق المثال العددي الآتي :

لايجاد الدرجات المعيارية للأعداد الخمسة الآتية : ١٧ ، ٢٢ ، ١٩ ، ٣٥ ، ٣٢ نجد أن المتوسط الحسابي لها =

$\frac{١٢٥}{٥}$ = ٢٥ والانحراف المعياري = ٧,١٨

فتكون القيم المعيارية هي على الترتيب :

— ١,١١ ، — ٠,٤٢ ، — ٠,٨٤ ، ١,٢٩ ، ٠,٩٧ .

واذا حسبنا المتوسط الحسابي لهذه القيم المعيارية وجدنا أنه صفر كما أن الانحراف المعياري لها يكون واحدا صحيحا (يمكن الوصول الى هذه النتيجة الأخيرة رياضيا) ولبيان ذلك في هذا المثال نتبع الخطوات الآتية :

على اعتبار أن المتوسط الحسابي للقيم المعيارية صفر تكون مربعات انحرافها عن المتوسط :

(١,١١) ٢ = ١,٢٣ ، (– ٠,٤٢) ٢ = ٠.١٨ ، (– ٠,٨٤) ٢ = ٠,٧١ ،
(١,٣٩) ٢ = ١,٩٣ ، (٠,٩٧) ٢ = ٠,٩٤

$$\frac{\text{مج ح}^{٢}}{\text{ن}} = \frac{٤,٩٩}{٥} = ١$$

تحويل الدرجات المعيارية للقيم الأصلية :

قد يحتاج الباحث النفسي أو الاجتماعي الى تحديد قيم معيارية خاصة ومعرفة القيم الأصلية المقابلة لها ، كأن يعتبر جميع من تزيد درجته المعيارية عن ٢ أقوياء في المادة المختبرة مثلا فهو في هذه الحالة يحتاج لمعرفة الدرجة التي تقابل ٢ درجة معيارية .

ولمعرفة الدرجة المقابلة نلاحظ أن معنى ٢ درجة معيارية أن الدرجة المطلوبة تزيد عن المتوسط الحسابي بضعف الانحراف المعياري ، فكأن الدرجة المطلوبة = المتوسط الحسابي + ٢ × الانحراف المعياري ، ومعنى – ٢ درجة معيارية أن الدرجة المطلوبة أقل من المتوسط الحسابي بضعف الانحراف المعياري . وبوجه عام فان : الدرجة المعيارية = المتوسط الحسابي + القيمة المعيارية × الانحراف المعياري .

الرتبة المئينية Percentile :

ذكرنا عند الكلام على الربيع أن الربيع هو النقطة التي تحدد أرباع المجموعة ، ولذلك فان في المجموعة ثلاث ربيعات وأربعة أرباع ، فالربيع الأدنى هو النقطة التي ينتهي عندها الربع الأول للقيم ، والربيع الأعلى هو النقطة التي ينتهي عندها الربع الثالث للقيم .

وكما قسمنا المجموعة الى أربعة أجزاء في حالة الربيع فاننا نقسمها الى مائة جزء في حالة الرتبة المئينية وتكون الرتبة المئينية هي النقطة التي تحدد هذه الأجزاء فاذا حددنا النقط التي تقل

عنها ١٠٪ من القيم مثلا كانت هذه النقطة هي المئين العاشر ويرمز له بالرمز P_{10}
ويمكن أن نتخذ له الرمز العربي الآتي : م١٠ وعلى ذلك فان الربيع الأول ر١ هو نفسه المئين الخامس والعشرين م٢٥ والربيع الثالث ر٣ هو نفسه م٧٥ . لأن كلا من الربيع الأول والمئين الخامس والعشرين تقع قبلها ربع القيم ، وأما الربيع الثالث أو المئين الخامس والسبعين يقع قبله ثلاثة أرباع القيم .

وللمئين فائدة كبيرة في المقاييس العقلية فكثير من هذه المقاييس تكون نتائجها على هيئة مئين ، فيلحق بالاختبار مثلا جدول يبين المئين المقابل للدرجات المختلفة ، بحيث اذا طبق المقياس على أحد الأفراد ثم صحح فبالرجوع الى مثل هذا الجدول يمكن معرفة مركز هذا الفرد بالنسبة لمن هم في سنه أو مستواه ، أو رتبته المئينية Percentile Rank واذا فهمنا المقصود من المئين أو الرتبة المئينية أدركنا أنه قد يكون لدينا نسبة مئوية خاصة ويكون المطلوب تحديدها بالنسبة للقيم في المجموعة أو قد يكون لدينا قيمة خاصة ويكون المطلوب تحديد النسبة المئوية لعدد القيم التي تقل عن هذه القيمة المعطاة .

حساب المئين في جدول تكراري :

لا تختلف طريقة حساب المئين عن طريقة حساب الوسيط أو الربيع فكل ما يستلزمه الحساب هو تحويل التكرار الى تكرار تجمعي . والمثال الآتي يوضح طريقة العمل .

أجري اختبار ذكاء على مجموعة من الأفراد فكانت درجاتهم فيه موزعة كالآتي : —

الفئات	التكرار	التكرار التجمعي الصاعد
٠ —	٨	٨
١٠ —	١١	١٩
١٥ —	١٠	٢٩
٢٠ —	١٥	٤٤
٢٥ —	٣٢	٧٦
٣٠ —	٤٤	١٢٠
٣٥ —	٣٠	١٥٠
٤٠ —	١٨	١٦٨
٤٥ —	١٢	١٨٠
٥٠ —	٩	١٨٩
٥٥ —	٦	١٩٥
٦٠ —	٥	٢٠٠
المجموع	٢٠٠	

جدول (٤٢) درجات ٢٠٠ شخص في اختبار ذكاء

فاذا أردنا معرفة المئين العشرين $م_{٢٠}$ كانت رتبته = $\frac{٢٠}{١٠٠} \times ٢٠٠ = ٤٠$ أي أنه سيكون في الفئة (٢٠ –) .

وتكون قيمته = $٢٠ + \frac{٤٠ - ٢٩}{١٥} \times ٥ = ٢٣.٦٧$

وتكون رتبة المئين السبعين م ٧٠ = $\frac{٧٠}{١٠٠} \times ٢٠٠ = ١٤٠$

وتكون قيمته = $٣٥ + \frac{١٤٠ - ١٢}{٣٠} \times ٥ = ٣٨.٣٣$

وهكذا يمكن حساب القيم المقابلة لكل مئين للاستفادة به بعد ذلك حسب الجدول الآتي :

المئين المطلوب	عدد القيم التي تحت المئين	طريقة حساب القيمة المقابلة للمئين	القيمة المقابلة للمئين
١٠	٢٠	$١٥ + \frac{٢٠ - ١٩}{١٠} \times ٥$	١٥,٥٠
٢٠	٤٠	$٢٠ + \frac{٤٠ - ٢٩}{١٥} \times ٥$	٢٣,٦٧
٣٠	٦٠	$٢٥ + \frac{٦٠ - ٤٤}{٣٢} \times ٥$	٢٧,٥٠
٤٠	٨٠	$٣٠ + \frac{٨٠ - ٧٦}{٤٤} \times ٥$	٣٠,٤٥
٥٠	١٠٠	$٣٠ + \frac{١٠٠ - ٧٦}{٤٤} \times ٥$	٣٢,٧٣
٦٠	١٢٠	٣٥ + صفر	٣٥,٠٠
٧٠	١٤٠	$٣٥ + \frac{١٤٠ - ١٢٠}{٣٠} \times ٥$	٣٨,٣٣
٨٠	١٦٠	$٤٠ + \frac{١٦٠ - ١٥٠}{١٨} \times ٥$	٤٢,٧٨
٩٠	١٨٠	٥٠ – صفر	٥٠,٠٠

جدول (٤٣) تحديد المئين في الجدول التكراري

ويلاحظ أن $م_{صفر}$ يقع عند مبدأ التوزيع حيث لا توجد قيمة أقل منه .

وأن $م_{١٠٠}$ تقع عند نهاية التوزيع حيث تكون قيم المجموعة أقل منها .

ايجاد الرتبة المئينية Percentile Rank لإحدى قيم المجموعة :

وكما يحتاج الباحث الى تحديد القيمة التي تقابل مئينا محددا قد يحتاج الى عكس ذلك ، أي الى معرفة الرتبة المئينية لقيمة من القيم لتحديد مركزها وسط المجموعة . ولنفرض مثلا أننا نريد أن نحسب الرتبة المئينية لفرد حصل على درجة ٣٨ في اختبار الذكاء السابق (جدول ٤٢) ، فتكون طريقة الحساب كما يلي :

أولا ــ درجة ٣٨ تقع في الفئة (٣٥ ــ)

ثانيا ــ هناك ١٢٠ فردا درجاتهم أقل من الحد الأدنى للفئة

ثالثا ــ نظرا لأن تكرار الفئة (٣٥ ــ) هو ٣٠

فان عدد أفراد الفئة(٣٥ــ) التي تقل درجاتهم عن ٣٨ هو $\frac{٣٨ - ٣٥}{٥} \times ٣٠ = ١٨$

رابعا ــ عدد جميع القيم التي تقل عن ٣٨ في المجموعة =

$١٢٠ + ١٨ = ١٣٨$

خامسا ــ ونظرا لأن عدد أفراد المجموعة كلها = ٢٠٠ لذلك فان المئين المقابل للدرجة ٣٨ هو $\frac{١٣٨}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ٦٩$

ويمكن أن نصف طريقة ايجاد الرتبة المئينية المقابلة لاحدى قيم المجموعـــة في الخطوات الآتية : ــ

١ – حدد الفئة التي يقع فيها والحد الأدنى لهذه الفئة .

٢ – احسب التكرار المتجمع قبل هذه الفئة .

٣ – احسب عدد أفراد الفئة التي تقل عن القيمة وهو يساوي

$$\frac{\text{القيمة – الحد الأدنى للفئة}}{\text{مدى الفئة}} \times \text{تكرار الفئة}$$

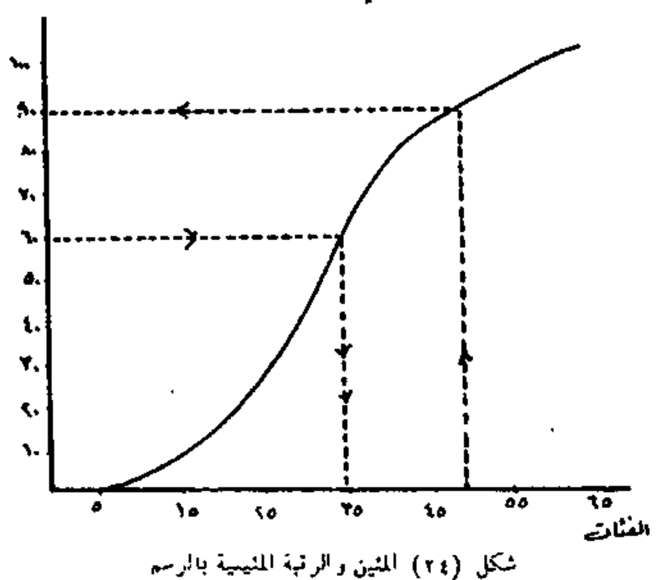
٤ – اجمع التكرار المتجمع قبل الفئة × عدد قيم الفئة التي تقل عن القيمة فينتج عدد جميع قيم المجموعة التي تقل عن القيمة المعطاة .

٥ – احسب الرتبة المئينية المطلوبة على الوجه الآتي :

$$\frac{\text{عدد القيم التي تقل عن القيمة المعطاة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ١٠٠$$

ايجاد المئين والرتبة المئينية بالرسم :

الرتبة المئينية لقيمة ما هي عدد القيم التي تقل عنها في المقياس المئوي ، ولذلك فان الخطوة الأولى في أي جدول تكراري هي تحويل التكرارات في هذا الجدول الى تكرارات تجمعية مئوية (أي على اعتبار أن المجموع ١٠٠ ، ثم رسم المنحنى التجمعي الناتج لهذا التوزيع ومن هذا المنحنى يمكن بسهولة استنتاج أي مئين أو أي رتبة مئينية لأية قيمة . فاذا أجرينا هذه الخطوات على جدول (٤٢) الذي يبين توزيع درجات ٢٠٠ شخصا في اختبار للذكاء حصلنا على المنحنى التجمعي المئوي الآتي :



شكل (٢٤) المئين والرتبة المئينية بالرسم

ومن هذا الرسم يتضح أن المئين الستيني هو عند القيمة ٣٥ ، وأن الرتبة المئينية للقيمة ٥٠ هي ٩٠ ، وهكذا يتسنى للباحث معرفة أي مئين أو رتبة مئينية من الرسم مباشرة .

العلاقة بين الدرجة المعيارية والرتبة المئينية :

ليست هناك علاقة مباشرة بين الدرجة المعيارية والرتبة المئينية ، ولذلك فلتحويل احداهما للأخرى نرجع الى القيمة الأصلية التي تقابلها . فاذا كان المطلوب مثلا معرفة الرتبة المئينية للدرجة المعيارية ١,٥ نضرب ١,٥ × الانحراف المعياري للمجموعة ونضيف الى حاصل الضرب المتوسط الحسابي ، فنتنتج القيمة الأصلية المقابلة للدرجة المعيارية المعطاة . وبمعرفة القيمة الأصلية يمكن استنتاج الرتبة المطلوبة كما سبق ايضاحه .

الا أنه في التوزيع الاعتدالي الذي سبق وصفه في الباب الأول يمكن بطريقة رياضية معرفة الرتبة المئينية المعادلة لأية درجة معيارية وبالعكس . وسيأتي تفصيل ذلك عند ذكر خواص المنحنى الاعتدالي في القادم .

استخدام الرتبة المئينية في البحوث النفسية :

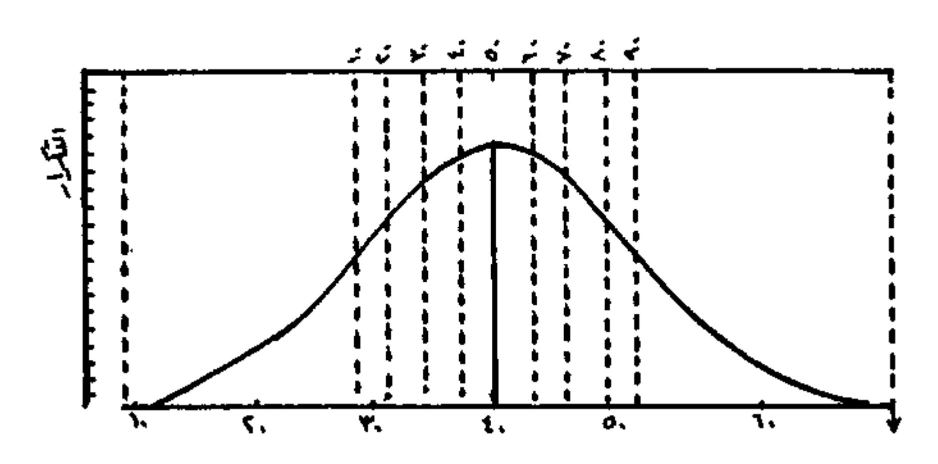
يستخدم المئين بكثرة في الاختبارات النفسية وخاصة الاختبارات الخاصة بالبالغين .

ففي اختبارات الذكاء مثلا يمكن استخدام نسبة الذكاء وهي ($\frac{\text{العمر العقلي}}{\text{العمر الزمني}}$ × ١٠٠) في حالة الأطفال ، أما في حالة الكبار فالطريقة المستخدمة عادة هي الرتبة المئينية ، كما أن من المتبع عادة أن يستخدم في القياس أكثر من اختبار واحد أي ما يطلق عليه النفسيون « بطارية Battery » بحيث يكشف كل اختبار منها عن سمة نفسية ، سواء كانت هذه السمة النفسية قدرة من القدرات أو صفة من الصفات الانفعالية كالانبساط extroversion والانطواء introversion أو السيطرة ascendance والخضوع submission . ونظرا لحاجة الباحث الى توحيد مستوى درجات كل هذه الاختبارات المتنوعة في البطارية الواحدة وسهولة مقارنتها بعضها ببعض فان طريقة الرتبة المئينية هي المستخدمة عادة في هذه المقارنة ، ويعمل من النتائج المختلفة لهذه الاختبارات والمقاييس النفسية ما يسمى التخطيط النفسي Psychological Profile

وقبل أن نوضح طريقة رسم التخطيط النفسي ينبغي أن نذكر خاصية يجب مراعاتها عند استعمال الرتبة المئينية في القياس النفسي . ذلك أن وحدات القياس المئيني ليست

متساوية في أغلب الأحيان ، وخاصة عند طرفي التوزيع . فاذا كان توزيع القيم الأصلية يتبع التوزيع الاعتدالي الجرسي – وهو ما يحدث في أغلب القياسات النفسية – فاننا نلاحظ أن أغلب القيم في المجموعة تتركز عند الوسط بينما يقل عدد القيم المتطرفة في التوزيع . وبما أن المقياس المئيني مؤسس على عدد قيم المجموعة ينتج أن وحدات القيم المتساوية لا يقابلها وحدات متساوية في المقياس المئيني بل نلاحظ أن وحدات المقياس المئيني تضيق في المنطقة الوسطى بينما تتسع جدا في الطرفين كلما بعدت القيم عن المتوسط كما يتضح من شكل (٢٥).

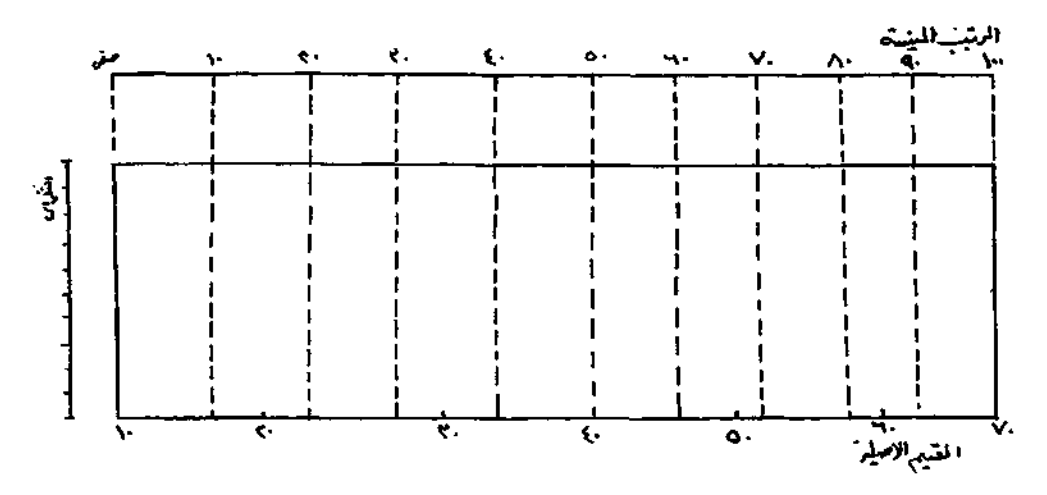
وهو يبين توزيعا فرضيا لقيم أصلية متوسطها ٤٠ وتمتد من القيمة ١٠ الى القيمة ٧٠ ، حيث يوضح المحور الأفقي للرسم مواضع هذه القيم بينما المواضع النسبية للرتب المئينية موضحة على الخط الأفقي العلوي ، وكما يتضح من هذا الرسم نلاحظ اتساع الوحدات في المقياس كلما بعدنا عن المتوسط على كل من الجانبين بينما تضيق الوحدات في المقياس المئيني كلما قربنا من الوسط . فنجد مثلا أن ١٠٪ الأولى من الحالات في الخط الأفقي العلوي موزعة على مسافة من القيم الأصلية تبلغ حوالي سبعة أمثال المسافة الموزعة عليها ١٠٪ من الحالات القريبة من المتوسط ، أي أن المسافة م$_{صفر}$ و م$_{١٠}$ سبعة أمثال المسافة بين م$_{٤٠}$ و م$_{٥٠}$ ، أو م$_{٥٠}$ و م$_{٦٠}$.



شكل (٢٥) اختلاف الوحدات في المقياس المئيني

ولكن هل يمكن أن تقابل وحدات القيم وحدات متساوية في المقياس المئيني في أي توزيع ؟ الواقع أن هذا يحدث في حالة التوزيع المستطيل الذي يتساوى فيه تكرار الفئات ، مهما قربت أو بعدت عن متوسط المجموعة .

كما يتضح من شكل (٢٦) ولكن هذا النوع من التوزيع نادر الحدوث جدا في النتائج النفسية أو التربوية ، ولذا يجب مراعاة ذلك دائما عند ذكر النتائج أو توضيحها



شكل (٢٦) تساوي وحدات المقياس المئيني في التوزيع المستطيل

بالرسم أو التعليق عليها احصائيا ، فالرتبة المئينية تعطي صورة واضحة عن رتبة الفرد أو مركزه النسبي في المجموعة التي ينتمي اليها ، أو المجموعة الطبيعية التي تقنن المقياس على أساسها ولكنها لا توضح مطلقا الفرق بين الدرجة التي نالها الفرد والدرجة التي نالها فرد آخر . ولذا فان الرتبة المئينية لا تخضع للعمليات الحسابية ، كالدرجات أو القيم العادية ، الا أن سهولة حسابها وشدة وضوحها في المقارنة جعلها شائعة الاستخدام في البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية .

فاذا استخدمنا الرتبة المئينية في رسم التخطيط النفسي كان علينا أن نراعي عدم تساوي وحدات المقياس المئيني في الرسم حتى نلتزم الدقة في التعبير والمقارنة . والمثال الآتي يوضح تخطيطا نفسيا لأحد الأفراد أجرى عليه الاختبارات الفارقة للقدرات Differential Aptitude tests ، ومنه يتضح أن هذا الفرد متميز في القدرة الميكانيكية وفي القدرة على الادراك المكاني بينما يظهر ضعفه بنوع خاص في القدرة على الأشغال الكتابية ، ولكنه عادي أو متوسط في القدرة على التفكير المعنوي .

ويستخدم المقياس المئيني كذلك بنوع خاص في مقاييس الميول interests

شكل (٢٧) تخطيط نفسي لقدرات أحد الأفراد

ذلك لأن هذه المقاييس تحتوي عادة على نواحي وميادين متنوعة من أوجه النشاط في الحياة.

ولتوضيح طريقة استخدامه ننقل فيما يلي صورة تخطيط نفسي لنتيجة اجابات فرد على أسئلة مقياس كودر KUDER الذي يحتوي على نواحي الميول الآتية :

١ ــ أوجه النشاط الخارجي Outdoor
٢ ــ الأعمال الميكانيكية Mechanical
٣ ــ النواحي العددية Computitional
٤ ــ النواحي العلمية Scientific
٥ ــ الدعاية والتأثير Persuasive
٦ ــ النواحي الفنية Artistic
٧ ــ النواحي الأدبية Literary
٨ ــ النواحي الموسيقية Musical
٩ ــ الخدمة الاجتماعية Social service
١٠ ــ الأعمال الكتابية Clerical

والأعداد العليا في الرسم توضح الدرجات التي نالها هذا الشخص في النواحي المختلفة، كما تدل الأعداد التي داخل المستطيلات على مقدار ما حصله من الدرجات في ناحية من

هذه النواحي والدرجات الجانبية هي الرتب المئينية في المقياس . ومن هذا التخطيط يتضح شدة ميل هذا الشخص الى النواحي الأدبية ثم الخدمة الاجتماعية وضعف ميله في النواحي الميكانيكية والعددية .

ويلاحظ أن الحرف M في الشكل معناها مذكر Masuline و F مؤنث Feminine ونظرا لأن الشخص الذي رسم له التخطيط مذكر فقد رسمت المستطيلات على اعتبار المعايير الخاصة بالذكور .

شكل (٢٨) تخطيط نفسي لأحد الأفراد في اختبار الميول لكودر

أسئلة على الباب الثالث

١ ـ طبق اختبار للهجاء على مجموعتين من الأفراد متقاربي السن : المجموعة الأولى من البنين والأخرى من البنات وكان توزيع الدرجات فيها كما يلي :

فئـات الدرجات	تكرار البنين	تكرار البنـات
١٥ ـ	٣	ـ
٢٠ ـ	٨	٢
٢٥ ـ	١٥	٤
٣٠ ـ	٢٦	٢٥
٣٥ ـ	٢٠	٢٨
٤٠ ـ	٣٥	٤٥
٤٥ ـ	٤٠	٣٢
٥٠ ـ	٢٢	٣٧
٥٥ ـ	١٨	٢٥
٦٠ ـ	١٩	١٨
٦٥ ـ	٢٠	٧
٧٠ فما فوق	٥	ـ
المجموع	٢٣١	٢٢٣

جدول (٤٤) درجات مجموعة من البنين وأخرى من البنات في اختبار الهجاء

والمطلوب المقارنة بين تشتت درجات المجموعتين .

٢ ـ احسب الانحراف المعياري لدرجات البنات في جدول (٤٤) .

٣ ـ أوجد الرتب المئينية المقابلة للدرجات الآتية في مجموعة البنين في جدول (٤٤) .

٢٩ ، ٣٧ ، ٦٣ ، ٥٢ ، ٤١

٤ ــ أوجد الدرجات المقابلة للدرجات المعيارية الآتية في مجموعة البنات في جدول (٤٤) .

ــ ٠,٥ ، ٢,٧و صفر ، ١,٦ ، ١٠١ .

٥ ــ احسب كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم العشر الآتية :

٥٠ ، ٣٥ ، ٢٢ ، ٧٣ ، ٦٤ ، ٨٠ ، ٧١ ، ٥٧ ، ٤٣ ، ٣١ ثم أضف ٥ على كل قيمة من هذه القيم العشر واحسب كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الجديدة .

٦ ــ اضرب كل قيمة من القيم العشر في المسألة السابقة في ٣ ثم احسب كل من المتوسط والانحراف المعياري للقيم الجديدة .

٧ ــ الجدول الآتي يبين المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمقاييس ثلاثة ، احسب معامل الاختلاف لكل منها ورتبها من حيث درجة تشتتها في كل من الجنسين على حدة ثم قارن بين تشتت كل مقياس في الجنسين :

القياس	سرعة النقر		قبضة اليد		الثبات	
	الرجال	النساء	الرجال	النساء	الرجال	النساء
المتوسط	٢١٠,٤	١٨٤,٠	٤٢,١	٢٣,٩	٥,٦٤	٥,١٣
الانحراف المعياري	٢٠,٠	١٩,٣	٦,٤	٤,٨	١,٦	١,٩
العدد	١٠١	١٦١	١٠٨	١٧٢	١٠٥	١٦٥

جدول (٤٥) نتائج ثلاثة مقاييس في الجنسين

٨ ــ مجموعتان من القيم المجموعة الأولى تشتمل على القيم الآتية :

٧٣ ، ٢٥ ، ٣٩ ، ٤٧

والمجموعة الثانية تشتمل على القيم الآتية :

٤٢ ، ٣٣ ، ٢٥ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ٤٧

فاذا رمزنا للمتوسط الحسابي للمجموعة الأولى بالرموز م$_{١}$

ورمزنا للمتوسط الحسابي للمجموعة الثانية بالرموز م$_{٢}$

ولعدد قيم المجموعة الأولى بالرموز $ن_١$

ولعدد قيم المجموعة الثانيـــة بالرموز $ن_٢$

وللمتوسط الحسابي للمجموعة الكلية الناتجة عن ضم المجموعتين بالرمز م

كان م ١ = $\frac{ن_١ م_١ + ن_٢ م_٢}{ن_١ + ن_٢}$

حقق هذا القانون في المجموعتين المذكورتين .

٩ ــ باستعمال الرسم أوجد كلاً من : (أ) نصف المدى الربيعي .

(ب) القيمة التي رتبتها المئينية ٦٥

(ج) الرتبة المئينية للقيمة ١٧

في الجدول التكراري الآتي :

الفئات	صفر–	٣–	٦–	٩–	٢١–	١٥–	١٨–	٢١–	٢٤–	٢٧–	٣٠–
التكرار	٥	١٠	١٢	١٤	٢٢	٣٥	٣٣	١٦	٢٠	١٨	١٥

جدول (٤٦)



الباب الرابع

المنحنى الاعتدالي وخواصه Normal curve

= نسبة الاحتمال Probability Ratio
= التوزيع الاعتدالي في المقاييس النفسية والاجتماعية
= جـــدول المنحـــنى الاعتـــدالي
الارتفـــاع
= تحويل التوزيع الى أقرب توزيع اعتدالي
المســـاحة
= العلاقة بين المئين والدرجة المعيارية في التوزيع الاعتدالي
= مقياس والدرجـــة التائيـــة
= تلخيص لأهم خواص المنحنى الاعتدالي
= مقاييس انحراف التوزيع عن الاعتدالي
الالتـــــواء Skewness
التفرطـــح Kurtosis



نسبـــة الاحتمـــال :

اذا توقعنا حدوث ظاهرة من الظواهر من بين عدد من الظواهر الأخرى المحتملة بحيث لا يوجد محل لاحتمال آخر فان نسبة احتمال حدوث الظاهرة هي النسبة بين تكرار حدوثها ومجموع تكرارات حدوث جميع الظواهر المحتملة . فاذا ألقينا قطعة من قطع العملة فانها اما أن تقع على الوجه الذي به الصورة واما أن تقع على الوجه الذي به عدد ما تساويه ، وليس هناك احتمال ثالث غير هذين الاحتمالين . وعلى ذلك تكون نسبة احتمال وقوع قطعة العملة على أحد هذين الوجهين = $\frac{١}{٢}$ واذا ألقينا « زهر » اللعب الى أعلى فاما أن يقع على الوجه الذي به نقطة واحدة أو على الوجه الذي به نقطتان أو ثلاث أو أربع أو خمس أو ست نقط . وعلى هذا فتكون نسبة احتمال وقوع « الزهر » على أحد الوجوه الست = $\frac{١}{٦}$ ، وفي حالة اجابة سؤال من نوع الصواب والخطأ أو أي نوع من الأسئلة ذات الوجهين : عاصمة فرنسا هي باريس (صواب – خطأ) أو الباردة (أكبر – أصغر) من المتر . أو تقع عنيزة (شمال – جنوب) الرياض . فاذا كانت الاجابة تبعا لمحض الصدفة دون علم حقيقي بالاجابة الصحيحة فان نسبة احتمال كون الاجابة صحيحة أو خاطئة هي ١/٢ ، ومن الطبيعي أن مجموع نسب احتمالات جميع الوجوه الممكنة لظاهرة واحدة يصل الى (١) ففي حالة القاء قطعة النقود يكون احتمال وقوعها على أي وجه من الوجهين = ١/٢ + ١/٢ = ١ .

وعلى ذلك فان نسبة الاحتمال تكون محصورة بين صفر ، ١ فاذا كانت نسبة الاحتمال صفرا كانت الظاهرة مستحيلة الحدوث كاحتمال انطباق السماء على الأرض مثلا ، واذا كانت نسبة الاحتمال (١) كانت الظاهرة مؤكدة الحدوث كاحتمال أن شخصا معينا سيموت يوما ما .

واذا ألقينا ست قطع من قطع العملة الى أعلى فان هناك سبع احتمالات للحالة التي تقع عليها القطع جميعها .

أولا : أن تقع القطع الست جميعها على الوجه الذي به الصورة .

ثانيا : أن تقع خمس قطع على وجه الصورة وقطعة واحدة على الوجه الآخر .

ثالثا : أن تقع أربعة قطع على وجه الصورة وقطعتان على الوجه الآخر .

رابعــا: أن تقع ثلاث قطع على وجه الصورة وثلاث قطع على الوجه الآخر .

خامسا : أن تقع قطعتان على وجه الصورة وأربع قطع على الوجه الآخر .

سادسا : أن تقع قطعة واحدة على وجه الصورة وخمس قطع على الوجه الآخر .

سابعا : أن تقع جميع القطع على الوجه الخالي من الصورة .

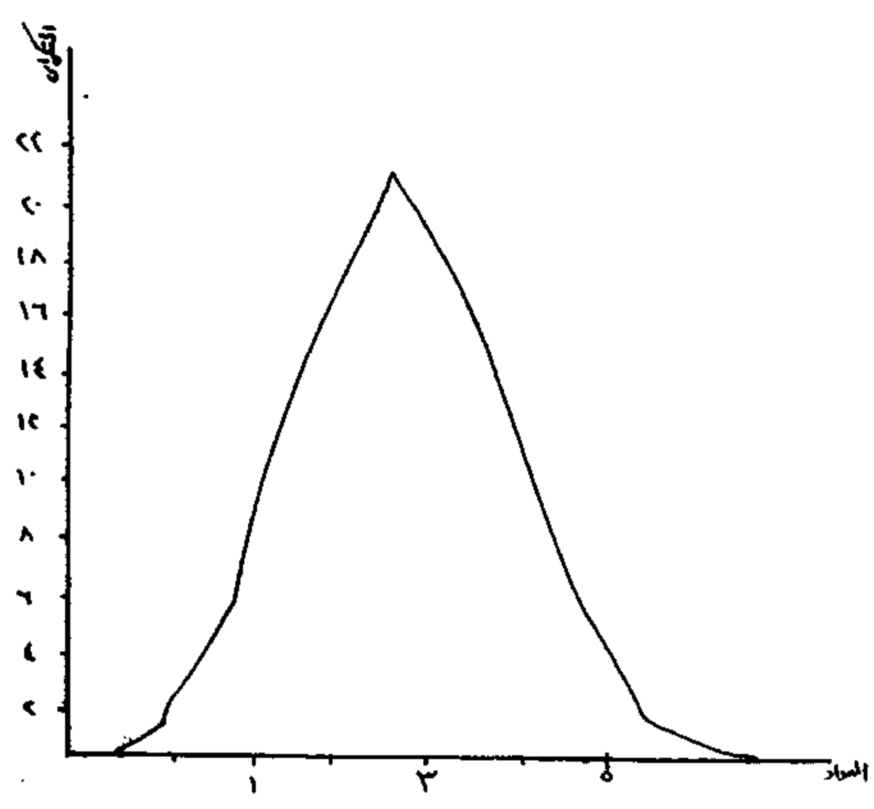
فاذا قذفنا هذه القطع الست الى أعلى ٦٤ مرة فان عدد المرات المحتملة لحدوث هذه الحالات السبع يمكن حسابها بطريقة جبرية (هي حدود مفكوك المقدار ذي الحدين الآتي (١/٢ + ١/٢) ٦ مضروبة في ٦٤ [١] وهي مبينة في الجدول الآتي :

عدد القطع التي تقع علىوجه الصورة	صفر ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦	المجموع
تكرار حدوث ذلك في ٦٤ مرة	١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ١٦	٦٤

جدول (٤٧) تكرار الحالات المختلفة لوقوع ست قطع

واذا رسمنا المضلع التكراري الذي يربط بين عدد القطع التي تقع على وجــه الصورة وتكرار حدوث ذلك نحصل على الشكل الآتي :

(١) حدود مفكوك $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢})^{٦}$ حسب نظرية ذات الحدين هي $(\frac{١}{٢})^{٦} + {}^{٦}\text{ق}_{١} (\frac{١}{٢})^{١} (\frac{١}{٢})^{٥} + {}^{٦}\text{ق}_{٢} (\frac{١}{٢})^{٢} (\frac{١}{٢})^{٤} + {}^{٦}\text{ق}_{٣} (\frac{١}{٢})^{٣} (\frac{١}{٢})^{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٤} (\frac{١}{٢})^{٤} (\frac{١}{٢})^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٥} (\frac{١}{٢})^{٥} (\frac{١}{٢})^{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٦} (\frac{١}{٢})^{٦}$.



شكل (٢٩) المضلع التكراري للحالات المختلفة لوقوع ست قطع على وجه الصورة

ومن هذا الجدول يستنتج أن نسبة احتمال وقوع الست قطع على وجه واحد سواء وجه الصورة أو الوجه الآخر = $\frac{١}{٣٢}$ ($\frac{١}{٦٤}$ + $\frac{١}{٦٤}$) .

وأن نسبة احتمال وقوع خمس قطع على وجه واحد وقطعة واحدة على الوجه الآخر = $\frac{٣}{١٦}$ ($\frac{٦}{٦٤}$ + $\frac{٦}{٦٤}$) .

ونسبة احتمال وقوع أربع قطع على وجه واحد وقطعتين على الوجه الآخر = $\frac{١٥}{٣٢}$ ($\frac{١٥}{٦٤}$ + $\frac{١٥}{٦٤}$) .

ونسبة احتمال وقوع ثلاث قطع على وجه والثلاث قطع الأخرى على الوجه الآخر = $\frac{٥}{١٦}$ ($\frac{٢٠}{٦٤}$) .

ومجموع نسب الاحتمالات كلها يساوي واحدا صحيحا كما سبق .

ومثل هذا التوزيع الذي يمثله الجدول يطلق عليه « التوزيع ذو الحدين » Binomial Distribution وهو يقرب من التوزيع الاعتدالي Normal Distribution الذي نحن بصدده الآن كلما كان العدد كبيرا .

والمنحنى الاعتدالي منحنى متماثل ، أي أنه لو أسقط خط عمودي من قمته الى المحور الأفقي فان نصفي المنحنى ينطبقان على بعضهما تماما . ويقسم هذا الخط العمودي المساحة التي يحجزها المنحنى تحته (وتمثل هذه المساحة مجموع القيم) الى نصفين متساويين . ونظرا لخاصية التماثل هذه فان المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمثل هذا التوزيع يكون منحدة القيمة . والشكل الجرسي الذي يحدد التوزيع الاعتدالي يوضح أن التكرارات تكون صغيرة نسبيا عند طرفي التوزيع بينما تزداد التكرارات كلما قربت من مركز المنحنى حتى تبلغ أكبر ما يمكن عند الوسط تماما .

التوزيع الاعتدالي في المقاييس النفسية والاجتماعية :

اذا رسمنا منحنيات لتوزيع صفات جسمية أو نفسية أو اجتماعية وجدنا أنها تميل كلما زاد عدد الحالات المبحوثة الى شكل التوزيع الاعتدالي . الا أن التوزيع الاعتدالي النموذجي typical لا يمكن أن نحصل عليه تماما في أي بحث من البحوث مهما اتسع نطاقه ، ولكننا نستطيع أن نتصور بحثا مثاليا لم تشبه شائبة من حيث الظروف المؤثرة عليه ، ونستطيع أن نتصور كذلك أننا استطعنا اجراء البحث على جميع أفراد المجتمع الأصلي وعند ذلك فقط يمكن أن نصل الى التوزيع الاعتدالي النموذجي . ومن هذا نفهم أن التوزيع الاعتدالي ما هو الا تجريد Abstraction لما يجب أن يكون عليه التوزيع ، ونحن نفترضه دائما لأننا نلاحظ أن البحث كلما اتسع وزاد دقة قربنا من التوزيع الاعتدالي في حالات السمات النفسية والاجتماعية . ويمكن تلخيص أهم هذه الحالات فيما يلي :

١ ــ الاحصاءات البيولوجية :

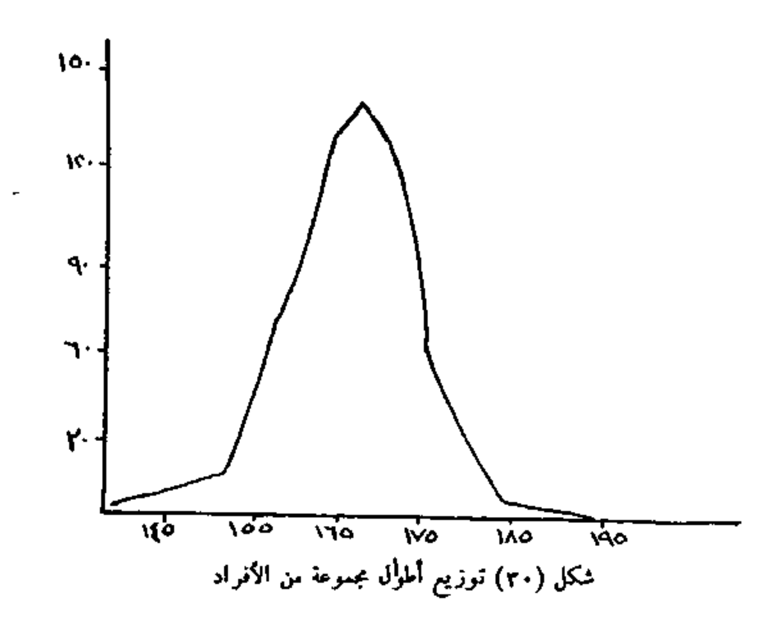
فلو حسبنا نسبة المواليد الذكور الى الاناث في بقعة محددة في عدد من السنين لوجدنا أن توزيع هذه النسبة يتبع توزيعا شبيها بالتوزيع الاعتدالي .

٢ ــ المقاييس العضوية :

فالطول والوزن مثلا في مجموعة من أفراد متماثلين في السن والجنس والبيئة موزع توزيعا قريبا من الاعتدالي .

٣ ــ الظواهر الاجتماعية :

كنسبة الزواج والطلاق في ظروف عادية محددة أو الدخول أو الأجور أو مستوى الانتاج الصناعي لعمال متحدي الظروف .



شكل (٣٠) توزيع أطوال مجموعة من الأفراد

٤ ــ المقايس النفسية والتعليمية :

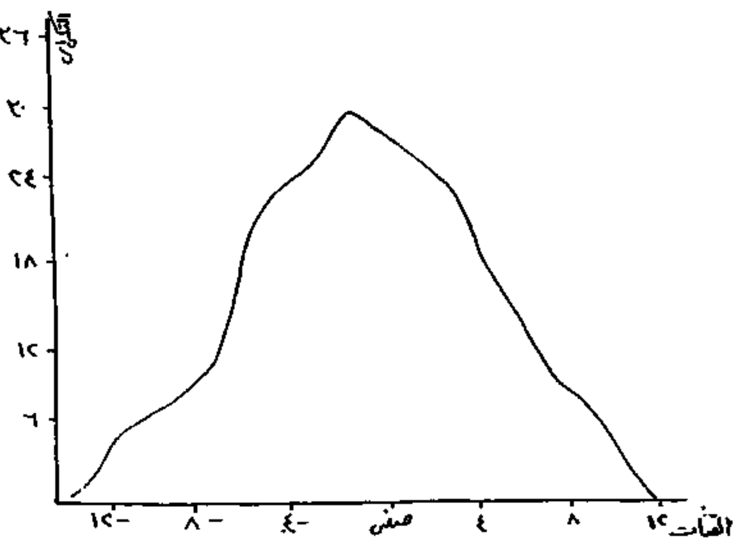
كالذكاء حسب نتائج اختبارات الذكاء المقننة . ونتائج اختبارات القدرات وسرعة الترابط وزمن الرجع ومدى الانطواء أو الانبساط ونتائج الاختبارات التحصيلية المختلفة كاختبار الحساب أو القراءة مثلا .

٥ ـ اخطاء التقرير والملاحظة :

فملاحظة الأطوال والصفات العضوية أو النفسية أو الاجتماعية المبنية على التقديرات الشخصية تحتوي على أخطاء قد تجعلها تزيد أو تنقص عن قيمها الحقيقية ، وتكون هذه الانحرافات عن القيم الحقيقية عادة موزعة توزيعا اعتداليا ، حيث يكون نصفها سالبا يجعل التقدير الشخصي أقل من القيم الواقعية ونصفها موجب يزيد التقدير الشخصي فيها عن القيم الحقيقيـــة .

وبالاختصار نستطيع أن نقول أنه ما دام البحث النفسي أو الاجتماعي خاليا من العوامل التي قد ترجح احدى كفتي نسبة الاحتمال على الكفة الأخرى فان الظواهر الطبيعية سواء كانت نفسية أو اجتماعية تميل دائما الى أن تتبع التوزيع الاعتدالي .

الا أنه ينبغي ألا يسوقنا هذا التعميم الى أكثر مما ينبغي ، فهناك احتياطات ينبغي أن نتخذها قبل أن نتوقع مثل هذا التوزيع . فظروف البحث قد تجعل مثل هذا التنبؤ بنوع التوزيع بعيدا عن الصحة كما سيتضح فيما بعد .



شكل (٣١) مضلع لأخطاء تقدير شخص لطول خط طوله ١٠ سم (٢٠٠) محاولة

جداول المنحنى الاعتدالي — الارتفاع :

ونظرا لأن المنحنى الذي يحدد التوزيع الاعتدالي يتبع شكلا هندسيا محددا فان مسيره يمكن أن يعبر عنه بمعادلة كأي منحنى آخر ومعادلة المنحنى الاعتدالي هي :

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}\sqrt{٢\text{ط}}}\ \text{ه}^{-\frac{\text{س}^{٢}}{٢\text{ع}^{٢}}} .$$

على اعتبار أن ص = ارتفاع المنحنى عند القيمة التي انحرافها عن المتوسط س .
ن=عدد القيم في المجموعة .

، ع = الانحراف المعياري للتوزيع .

، ط = ٣٫١٤١٦

، ه = الأساس الطبيعي للوغاريتم أي = ٢٫٧١٨

، س = انحراف القيمة عن المتوسط .

ونظرا لأن قيمة كل من ط ، ه ثابتة ومعروفة فتصبح المعادلة كما يلي :

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{٢٫٥٠٦٦\ \text{ع}} \times ٢٫٧١٨^{-\frac{\text{س}^{٢}}{٢\text{ع}^{٢}}}$$

واذا كان الانحراف المعياري للتوزيع هو الواحد الصحيح كما هو الحال فيما اذا حولت جميع قيم المجموعة الى درجات معيارية كما سبق ، تصبح المعادلة كما يلي .

$$ص = \frac{ن}{٢,٥٠٦٦} \times ٢,٧١٨ - \frac{س^٢}{٢}$$

أي أن الارتفاع عند أية نقطة في المنحنى الاعتدالي يتوقف على عدد القيم في المجموعة وعلى بعد النقطة عن مركز المنحنى ، وهذا بديهي فعدد القيم في المجموعة هو الذي يحدد المسافات التي يحدها المنحنى ، وبعد النقطة عن المركز يحدد مدى ابتعاد الارتفاع عن أكبر ارتفاع في المنحنى وهو المعبر عن تكرار المنوال في التوزيع .

ولن يحتاج الباحث الى حساب هذه الارتفاعات في النقط المختلفة ان أراد أن يحصل على توزيع اعتدالي نموذجي ، فان هذه الارتفاعات قد حسبت ورتبت في جدول احصائي خاص هو جدول (٤٩) . وما على الباحث الا حساب انحراف القيمة عن المتوسط وبالرجوع الى هذا الجدول يستطيع معرفة تكرار هذه القيمة على اعتبار أن التوزيع اعتدالي نموذجي .

وبهذه الوسيلة يمكن تحويل أي توزيع الى أقرب توزيع اعتدالي . الا أنه يجب ألا يكون التوزيع الأصلي بعيدا بعدا له دلالة احصائية عن هذا التوزيع الاعتدالي النموذجي . فاذا أجرى الباحث اختبارا نفسيا على مجموعة من الأشخاص ، ثم صنف درجات هذا الاختبار في جدول تكراري فان من الطبيعي أن يجد أن هذا التوزيع ينحرف قليلا أو كثيرا عن التوزيع الاعتدالي . الا أنه اذا كان الانحراف قليلا ليس له دلالة احصائية فانه يحتاج في كثير من الأحيان الى تعديل التوزيع حتى ينطبق على التوزيع الاعتدالي النموذجي أي على اعتبار أن سبب انحراف التوزيع الأصلي عن التوزيع النموذجي راجع الى أن البحث قد أجري على عينة محددة ولم يجر على المجتمع الأصلي مثلا . وهو يفترض في هذه الحالة أن السمة التي يقيسها موزعة توزيعا اعتداليا في المجتمع الأصلي . الا أننا ينبغي أن نحذر من الوقوع في افتراض خاطىء في بعض الأحيان ، فقد يتسبب انحراف التوزيع عن أسباب حقيقية جوهرية في التجربة أهمها :

(١) أن البحث يجري على عينة محددة بأوصاف لا تنطبق على أوصاف المجتمع الأصلي فاذا أجرينا اختبارا للذكاء على مجموعة أغلبها من ضعاف العقول فلا بد أن ينحرف التوزيع عن الاعتدالي . كما نتوقع ذلك أيضا اذا طبق نفس الاختبار على مجموعة

أغلبها من أفراد ممتازي الذكاء . ولا يمكننا في مثل هذه الحالات أن نعدل التوزيع على أساس افتراض أن الذكاء موزع توزيعا اعتداليا في المجتمع الأصلي .

(٢) أن المقياس يكون متحيزا Biased لناحية خاصة كأن يكون الاختبار الذي يجري على مجموعة من الأفراد أعلى من مستواهم أو أقل منه بدرجة كافية لأن يجعل التوزيع ملتويا التواء موجبا أو سالبا . أو أن الأسئلة التي تشتمل عليها الاختبار لم تكن من النوع المميز بين الضعيف والقوي مثلا .

(٣) أن السمة التي يهدف الباحث الى قياسها لا تكون موزعة توزيعا اعتداليا في المجتمع الأصلي ، فاذا طبقنا مقياسا للاتجاهات العقلية يتعلق بالاتجاه نحو اليهود في الوقت الحاضر على جماعة من العرب فان درجات هذا المقياس لا يمكن أن تكون موزعة توزيعا اعتداليا ، حيث تميل أغلب الاتجاهات الى الناحية المعادية لليهود . فمن الطبيعي اذن أن نحصل على توزيع غير اعتدالي . وأن أية محاولة لتعديل هذا التوزيع تكون محاولة صناعية تبعد التوزيع عن صورته الحقيقية .

لهذا كان علينا أن ندرك أن الموقف في أي اختبار يتوقف على ثلاثة عوامل : السمة التي نقيسها — والأداة التي تستخدمها في القياس — والعينة التي نقيس السمة فيها . وكل من هذه العوامل الثلاثة تحتاج الى فحص قبل أن يقرر الباحث تعديل التوزيع الذي حصل عليه ليطابق التوزيع الاعتدالي النموذجي . فالعامل الأول يستفيد الباحث في فحصه بخبراته السابقة بالبحوث الأخرى في نفس الميدان ، والتي على أساسها يستطيع أن يفترض أن السمة موزعة في المجتمع الأصلي توزيعا اعتداليا ، وأما العامل الثاني فيحتاج في فحصه الى خبرة بالقياس النفسي والشروط الاحصائية لصلاحية المقياس الذي يستخدمه . وأمـــا العامل الثالث الخاص بالعينة فله شروط خاصة لضمان عدم انحياز الباحث الى صفات خاصة في اختيارها تجعلها مختلفة عن المجتمع الأصلي الذي أخذت منه . وموضوع العينات وطرق اختيارها وشروط صلاحية المقياس ستبحث بالتفصيل فيما بعد .

الا أن الاحصاء يعاون الباحث خطوة أخرى ، فهو يدله بعد أن يعدل التوزيع الذي حصل عليه عما اذا كان محقا في هذا التعديل أم أن التوزيع الأصلي مختلف اختلافا كبيرا عن التوزيع المعدل مما قد يظن معه أن هناك خطأ ما في أحد العوامل الثلاثة السابقة .

تحويل التوزيع الى أقرب توزيع اعتدالي :

عرفنا أن الباحث يهدف في كثير من الأحيان الى اجراء عملية (تصحيح) للتوزيع

الذي يحصل عليه في بحثه ، فيعمل الى تحويله الى أقرب توزيع اعتدالي نموذجي ، وفي هذه الحالة يستفيد من الجدول الذي يوضح ارتفاع المنحنى الاعتدالي عند النقطة المختلفة من التوزيع . ومن الواجب ألا يختلف التوزيع الجديد عن التوزيع الأصلي في كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري .

ونظرا لأن الجدول يعطي الارتفاعات عند النقط المعبرة عن انحراف القيم عن المتوسط الحسابي فان الارتفاعات فيه محسوبة في توزيع انحرافه المعياري هو الوحدة . لذلك كان من اللازم تحويل القيم الى درجات معيارية حتى تناسب الجداول المعدة للمنحنى الاعتـــدالي

ولتوضيح طريقة التحويل نتبع الخطوات التي أجريت في الجدول الآتي وهو يبين توزيع درجات ٢٦٠ شخصا في اختبار للذكاء :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الفئات	التكرار ك	مراكز الفئات س	$\bar{ح}$	ك $\bar{ح}$	ك $\bar{ح}^2$	ح (س-م)	$\frac{ح}{ع}$	ص	$\bar{ك}$
						٥٢ –	٢,٢١ –	٠,٠٤	٤,٤٢
–٣٠	١٦	٣٥	– ٤	– ٦٤	٢٥٦	–٤٢	–١,٨٩	٠,٠٨	٨,٨٥
–٤٠	٢٢	٤٥	– ٣	– ٦٦	١٩٨	–٣٢	–١,٣٦	٠,١٦	١٧,٧٠
–٥٠	٢٧	٥٥	– ٢	– ٥٤	١٠٨	–٢٢	–٠,٩٣	٠,٢٦	٢٨,٨٢
–٦٠	٣٥	٦٥	– ١	– ٣٥	٣٥	–١٢	–٠,٥١	٠,٣٥	٣٨,٧٢
–٧٠	٤٥	٧٥	صفر	صفر	—	–٢	–٠,٠٩	٠,٤٠	٤٤,٢٤
–٨٠	٤٢	٨٥	١	٤٢	٤٢	٨	٠,٣٤	٠,٢٨	٤٢,٠٣
–٩٠	٢٨	٩٥	٢	٥٦	١١٢	١٨	٠,٧٧	٠,٣٠	٢٣,١٨
–١٠٠	١٩	١٠٥	٣	٥٧	١٧١	٢٨	١,١٩	٠,٢٠	٢٢,١٢
–١١٠	١٤	١١٥	٤	٥٦	٢٢٤	٣٨	١,٦٢	٠,١١	١٢,١٧
–١٢٠	١٢	١٢٥	٥	٦٠	٣٠٠	٤٨	٣,٠٤	٠,٠٥	٥,٥٣
						٥٨	٢,٤٧	٠,٠٢	٢,٢١
	٢٦٠			١٧١ ٢١٩ – ٥٢	١٤٤٦				٢٥٩,٩٩

جدول (٤٨) تحويل التوزيع الى اعتدالي نموذجي

المتوسط الحسابي ٧٥ + $\frac{٥٢}{٢٦٠}$ × ١٠ = ٧٧

والانحراف المعياري = ١٠ $\sqrt{\frac{١٤٤٦}{٢٦٠} - (\frac{٥٢}{٢٦٠})^{٢}}$ = ٢٣.٥٠

الدرجة المعيارية	المساحة من المتوسط	المساحة الكبرى	المساحة الصغرى	الارتفاع (ص)
٠,٠٠	٠,٠٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٣٩٨٩
٠,٠٥	٠.٥١٩٩	٠,٥١٩٩	٠,٤٨٠١	٠,٣٩٨٤
٠,١٠	٠,٠٣٩٨	٠,٥٣٩٨	٠,٤٦٠٢	٠,٣٩٧٠
٠,١٥	٠,٠٥٩٦	٠,٥٥٩٦	٠,٤٤٠٤	٠,٣٩٤٥
٠,٢٠	٠,٠٧٩٣	٠,٥٧٩٣	٠,٤٢٠٧	٠,٣٩١٠
٠,٢٥	٠,٠٩٨٧	٠,٥٩٨٧	٠,٤٠١٣	٠,٣٨٦٧
٠,٣٠	٠.١١٧٩	٠,٦١٧٩	٠,٣٨٢١	٠,٣٨١٤
٠,٣٥	٠,١٣٦٨	٠,٦٣٦٨	٠,٣٦٣٢	٠,٣٧٥٢
٠,٤٠	٠,١٥٥٤	٠,٦٦٥٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٦٨٣
٠,٤٥	٠,١٧٣٦	٠,٦٧٣٦	٠,٣٢٦٤	٠,٣٦٠٥
٠,٥٠	٠,١٩١٥	٠,٦٩١٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٥٢١
٠,٥٥	٠,٢٠٨٨	٠,٧٠٨٨	٠,١٩١٢	٠,٣٤٢٩
٠,٦٠	٠,٢٢٥٧	٠,٧٢٥٧	٠,٢٧٤٣	٠,٣٣٢٢
٠,٦٥	٠,٢٤٢٢	٠,٧٤٢٢	٠,٢٥٧٨	٠,٣٢٣٠
٠,٧٠	٠,٢٥٨٠	٠,٧٥٨٠	٠,٢٤٢٠	٠.٣١٢٣
٠,٧٥	٠,٢٧٣٤	٠,٧٧٣٤	٠,٢٢٦٦	٠,٣٠١١
٠,٨٠	٠,١٨٨١	٠,٧٨٨١	٠,٢١١٩	٠,٢٨٩٧
٠,٨٥	٠,٣٠٢٣	٠,٨٠٢٣	٠,١٩٧٧	٠,٢٧٨٠
٠,٩٠	٠,٣١٥٩	٠,٨١٥٩	٠,١٨٤١	٠,٢٦٦١
٠,٩٥	٠,٣٢٨٩	٠,٨٢٨٩	٠,١٧١١	٠,٢٥٤١
١,٠٠	٠,٣٤١٣	٠,٨٤١٣	٠,١٥٨٧	٠,٢٤٢٠
١,٠٥	٠,٣٥٣١	٠,٨٥٣١	٠,١٤٦٩	٠,٢٢٩٩
١,١٠	٠,٣٦٤٣	٠,٨٦٥٣	٠,١٣٥٧	٠,٢١٧٩
١,١٥	٠,٣٧٤٩	٠,٨٨٤٩	٠,١٢٥١	٠,٢٠٥٩

١,١٥	٠,٣٧٤٩	٠,٨٨٤٩	٠,١٢٥١	٠,٢٠٥٩
١.٢٠	٠.٣٨٤٩	٠.٨٧٤٩	٠,١١٥١	٠,١٩٤٢
١.٢٥	٠.٣٩٤٤	٠,٨٩٤٤	٠,١٠٥٦	٠,١٨٢٦
١,٣٠	٠,٤٠٣٢	٠,٩٠٣٣	٠,٩٦٨	٠,١٧١٤
١,٣٥	٠,٤١١٥	٠,٩١١٥	٠,٠٨٨٥	٠,١٦٠٤
١,٤٠	٠,٤١٩٢	٠,٩١٩٢	٠,٠٨٠٨	٠,١٤٩٧
١,٤٥	٠,٤٢٦٥	٠,٩٢٦٥	٠,٠٧٣٥	٠,١٣٩٤
١,٥٠	٠,٤٣٣٢	٠,٩٣٣٢	٠,٠٦٦٨	٠,١٢٩٥
١,٥٥	٠,٤٣٩٤	٠,٩٣٩٤	٠,٠٦٠٦	٠,١٢٠٠
١,٦٠	٠,٤٤٥٢	٠,٩٤٥٢	٠,٠٥٤٨	٠,١١٠٩
١,٦٥	٠,٤٥٠٥	٠,٩٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,١٠٢٣
١,٧٠	٠,٤٥٥٤	٠,٩٥٥٤	٠,٠٤٤٦	٠,٠٩٤٠
١,٧٥	٠,٤٥٩٩	٠,٩٥٩٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٨٦٣
١,٨٠	٠,٤٦٤١	٠,٩٦٤٠	٠,٠٣٥٩	٠,٠٧٩٠
١,٨٥	٠,٤٦٧٨	٠,٩٦٧٨	٠,٠٣٢٢	٠,٠٧٢١
١,٩٠	٠,٤٧١٣	٠,٩٧١٣	٠,٠٢٨٧	٠,٠٦٥٦
١,٩٥	٠,٤٧٤٤	٠,٩٧٤٤	٠,٠٢٥٦	١,٠٠٩٦
٢,٠٠	٠,٤٧٧٢	٠,٩٧٧٢	٠,٠٢٢٨	٠,٠٥٤٠
٢,٠٥	٠,٤٧٩٨	٠,٩٧٩٨	٠,٠٢٠٢	٠,٠٤٨٨
٢,١٠	٠,٤٨٢١	٠,٩٨٢١	٠,٠١٧٩	٠,٠٤٤٠
٢,١٥	٠,٤٨٤٢	٠,٩٨٤٢	٠,٠١٥٨	٠,٠٣٩٥
٢,٢٠	٠,٤٨٦١	٠,٩٨٦١	٠,٠١٢٩	٠,٠٣٥٥
٢,٢٥	٠,٤٨٧٨	٠,٩٨٧٨	٠,٠١٢٢	٠,٠٣١٧
٢,٣٠	٠,٤٨٩٣	٠,٩٨٩٣	٠,٠١٠٧	٠,٠٢٨٣
٢,٣٥	٠,٤٩٠٦	٠,٩٩٠٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٢٥٢
٢,٤٠	٠,٤٩١٨	٠,٩٩١٨	٠,٠٠٨٢	٠,٠٢٢٤
٢,٤٥	٠,٤٩٢٩	٠,٩٩٢٩	٠,٠٠٧١	٠,٠١٩٨
٢,٥٠	٠,٤٩٣٨	٠,٩٩٣٨	٠,٠٠٦٢	٠,٠١٧٥
٢,٥٥	٠,٤٩٤٦	٠,٩٩٤٦	٠,٠٠٥٤	٠,٠١٥٤

٢,٦٠	٠,٤٩٥٣	٠,٩٩٥٣	٠,٠٠٤٧	٠,٠١٣٦
٢,٦٥	٠,٤٩٦٠	٠,٩٩٦٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠١١٩
٢,٧٠	٠,٤٩٦٥	٠,٩٩٦٥	٠,٠٠٣٥	٠,٠١٠٤
٣,٨٥	٠,٤٩٧٤	٠,٩٩٧٤	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٧٩
٢,٩٠	٠,٤٩٨١	٠,٩٩٨١	٠,٠٠١٩	٠,٠٠٦٠
٣,٠٠	٠,٤٩٨٦٥	٠,٩٩٨٦٥	٠,٠٠١٣٥	٠,٠٠٤٤
٣,١٠	٠,٤٩٩٠٣	٠,٩٩٩٠٣	٠,٠٠٠٩٧	٠,٠٠٣٣
٣,٢٠	٠,٤٩٩٣١	٠,٩٩٩٣١	٠,٠٠٠٦٩	٠,٠٠٢٤
٣,٤٠	٠,٤٩٩٦٦	٠,٩٩٩٦٦	٠,٠٠٠٣٤	٠,٠٠١٢
٣,٦٠	٠,٤٩٩٨٤	٠,٩٩٩٨٤	٠,٠٠٠١٦	٠,٠٠٠٦
٣,٨٠	٠,٤٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٣	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٣
٤,٠٠	٠,٤٩٩٩٦٨٣	٠,٩٩٩٩٦٨٣	٠,٠٠٠٠٣١٧	٠,٠٠٠١
٤,٥٠	٠,٤٩٩٩٩٦٦	٠,٩٩٩٩٩٦٦	٠,٠٠٠٠٠٣٤	٠,٠٠٠٠١٥
٥,٠٠	٠,٤٩٩٩٩٩٧	٠,٩٩٩٩٩٩٧	٠,٠٠٠٠٠٠٣	٠,٠٠٠٠٠١٦
٦,٠٠	٠,٤٩٩٩٩٩٩	٩٩٩٩٩٩٩٩٩	٠,٠٠٠٠٠٠٠٠١	٠,٠٠٠٠٠٠٠٦

جدول (٤٩) الارتفاعات وأجزاء المساحة في المنحنى الاعتدالي

وتنحصر خطوات العمل بعد معرفة المتوسط والانحراف المعياري في تحويل القيم الى درجات معيارية ، ثم تحديد أطوال الارتفاعات لمختلفة للمنحنى الاعتدالي النموذجي عند النقط المعبرة عن الدرجات المعيارية . وذلك بالكشف عن هذه الارتفاعات في الجدول المعد لهذا الغرض (جدول ٤٩) وتكون الخطوة التالية بعد ذلك تصحيح هذه الارتفاعات بما يناسب عدد القيم (ن) والانحراف المعياري للمجموعة (ع) ومدى الفئة (ف) وتتلخص الخطوات فيما يأتي : –

١ – احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجموعة (م ، ع) .

٢ – حول مراكز الفئات الى قيم معيارية أي أوجد لكل منها $\left(\frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}\right)$ على اعتبار أن س هي مركز الفئة وم هي المتوسط الحسابي و ع هي الانحراف المعيـــاري المجموعـــة .

٣ ـ ونظرا لأن الجدول التكراري الذي تحصل عليه من الأبحاث العلمية يكون ناقصا من طرفه أي أن هناك احتمالا كبيرا في عدم اشتمال العينة المختارة على أقل القيم وأعلاها في المجتمع الأصلي فان من المتبع عادة أن نضيف الى الجدول فئتين احداهما قبل أقل الفئات قيمة والأخرى بعد أعلاها قيمة .

٤ ـ باستخدام (جدول ٥٥) أوجد الارتفاعات (في العمود ص) المقابلة للقيم الدالة على الدرجات المعيارية .

ويلاحظ أن هذا الجدول لا يشتمل على جميع القيم المعيارية ، بل تتابع هذه القيم فيه كل ٠,٠٥ في أغلب الحالات ، ومن الطبيعي أن الجدول الكامل يمكن اعداده بحيث يشتمل على جميع القيـــم في أغلب الأحيان الا أنه بعملية حسابية بسيطة يمكن استخدام هذا الجدول المختصر لتحديد أي ارتفاع عند أية قيمة معيارية ولنضرب لذلك المثالين الآتيين :

الارتفاع المقابل للقيمة المعيارية ٠,٩٠ = ٠,٢٦٦١

والارتفاع المقابل للقيمة المعيارية ٠,٩٥ = ٠,٢٥٤١

فاذا أردنا معرفة الارتفاع المقابل للقيمة المعيارية ٠,٩٣ مثلا فاننا نوجد الفرق في الارتفاع المقابل لفرق ٠,٠٥ في القيمة المعيارية عند هذه النقطة من المنحنى وهو هنـــا = ٠,٠١٢٠ .

ونظرا لأن الفرق المطلوب هو ٠,٠٣ فقط في الدرجة المعيارية (زيادة ٠,٩٣ عن ٠,٩٠) فان فرق الارتفاع المقابل له ٠,١٢٠ × $\frac{٠,٠٣}{٠,٠٥}$ = ٠,٠٠٧٢ فيكون الارتفاع المطلوب = ٠,٢٦٦١ ــ ٠,٠٠٧٢ = ٠,٢٥٨٩ .

وبنفس الطريقة نستطيع ايجاد (ص) المقابل لقيمة معيارية ٢,٦٨ :

الارتفاع المقابل للقيمة المعيارية ٢,٦٥ = ٠,٠١١٩

والارتفاع المقابل للقيمة المعيارية ٢,٧٠ = ٠,٠١٠٤

فيكون الفـــرق ٠,٠٠١٥

ويكون الارتفـــاع المطلوب = ٠,٠١١٩ ــ ٠,٠٠١٥ × $\frac{٣}{٥}$

= ٠,٠١١٠

أو $= ٠,٠١٠٤ + ٠,٠٠١٥ \times \frac{٣}{٥}$

$= ٠,٠١١٠$

(٥) للحصول على التكرار المتوقع حسب التوزيع الاعتدالي النموذجي الذي يناسب عدد القيم الأصلية والانحراف المعياري يضرب كل ارتفاع وجد من الجدول في عامل مقـــداره .

$$\frac{ف \times ن}{ع}$$

وهذا المقدار يساوي في الجدول التكراري $\frac{٢٦٠ \times ١٠}{٢٣,٥٠} = ١١٠,٦٤$

ولنتتبع الآن في نفس الجدول التكرار النظري (كَ) لاحدى الفئات وهي الفئة (٤٠ —).

خطوات الحصول على كَ للفئة (٤٠ —) تنحصر فيما يأتي :

(١) مركز الفئة (العامود الثالث) ٤٥

(٢) انحراف هذا المركز عن المتوسط الحسابي (س — م عامود ٧) — ١٢

(٣) القيمة المعيارية لهذا المركز وهي خارج قسمة — ١٢ على الانحراف المعياري وهو ٢٣,٥ تساوي — ٠,٥١

(٤) الارتفاع عند القيمة المعيارية ٠,٥١ (ويلاحظ أن الاشارة هنا ليست ذات أهمية ، فنظرا لتماثل المنحني فان الارتفاع عند ٠,٥١ هو نفسه عند — ٠,٥١ معيارية) يمكن الحصول عليه من جدول (٤٩) كما يأتي :

ص عند ٠,٥٠ = ٠,٣٥٢١

ص عند ٠,٥٥ = ٠,٣٤٢٩

الفـــرق = ٠,٠٠٩٢

∴ ص عند ٠,٥١ = ٠,٣٥٢١ — $\frac{١ \times ٠,٠٠٩٢}{٥}$

= ٠,٣٥٠٣ (وهي المقابلة للفئة في عامود ٩)

(٥) التكرار النظري كَ عامود ١٠) يمكن الحصول عليه بضرب ٠,٣٥ × عامل قدره

$\frac{ف ن}{ع}$ = ٦٤ ١١٠ في هذا الجدول فينتج ٣٨.٧٢

واذا قارنا التكرار الأصلي للفئات في هذا الجدول بالتكرار المعدل النموذجي وجدنا تقاربا كبيرا بينهما ، وذلك لأن التوزيع الأصلي قريب من التوزيع الاعتدالي ونلاحظ في التكرارات النظرية الجديدة أن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ومجموع التكرارات لم تتغير نتيجة لهذا التعديل وبمثل هذه الطريقة يتسنى للباحث أن يقرر ما اذا كانت سمة من سمات الشخصية مثلا موزعة توزيعا قريبا من الاعتدالي أو أن الانحراف عن هذا التوزيع النموذجي كبير بدرجة لا يمكن ارجاعها الى مجرد أخطاء العينة أو عامل الصدفة ، والاحصاء لا يقف في هذه المقارنة عند مجرد التأمل السطحي لكل من التوزيعين ، ولكنها تستخدم في ذلك مقياسا [1] احصائيا خاصا سيأتي الكلام عنه عند الكلام في مقاييس الدلالة .

وقد يفيد في هذه المقارنة رسم المنحنى الاعتدالي ومقارنة مواضع النقط المعبرة عن التكرار بسير المنحنى الاعتدالي المعدل واذا كان هدف الباحث محددا برسم المنحنى الذي يقترب بأكبر قدر ممكن من التوزيع الاعتدالي فيمكن تبسيط الطريقة السابقة وذلك بتحديد الارتفاعات من جدول (٤٩) المقابلة لدرجات معيارية منتظمة دون الحاجة الى البحث عن الارتفاعات المقابلة لمراكز الفئات ، ثم التكرارات المناسبة لكل من هذه الارتفاعات . وتكون الخطوة التالية تحويل الدرجات المعيارية التي بدأت بها الطريقة الى القيم الأصلية المقابلة لها . أي أن هذه الطريقة تسير عكس الطريقة السابقة ، فبينما تبدأ الطريقة السابقة بمراكز الفئات وتتم بتحويل هذه المراكز الى الدرجات المعيارية المقابلة لها ثم بالبحث عن ارتفاعات المنحنى عند هذه النقطة ثم حساب التكرارات المناسبة ، تبدأ هذه الطريقة بقيم معيارية يمكن ايجادها بسهولة من جدول الارتفاعات ، دون الحاجة الى عمليات حسابية وتنتهي بمعرفة القيم الأصلية المقابلة لهذه الدرجات المعيارية ، واليك تطبيق هذه الخطوات في جدول (٥٠) :

---

(١) يطلق على المقياس المستخدم في هذه الحالة اختبار كا٢ Chi Square Test فهو يدل على نسبة احتمال أن التوزيع المختبر قد أتى من أصل موزع توزيعاً اعتدالياً نموذجياً .

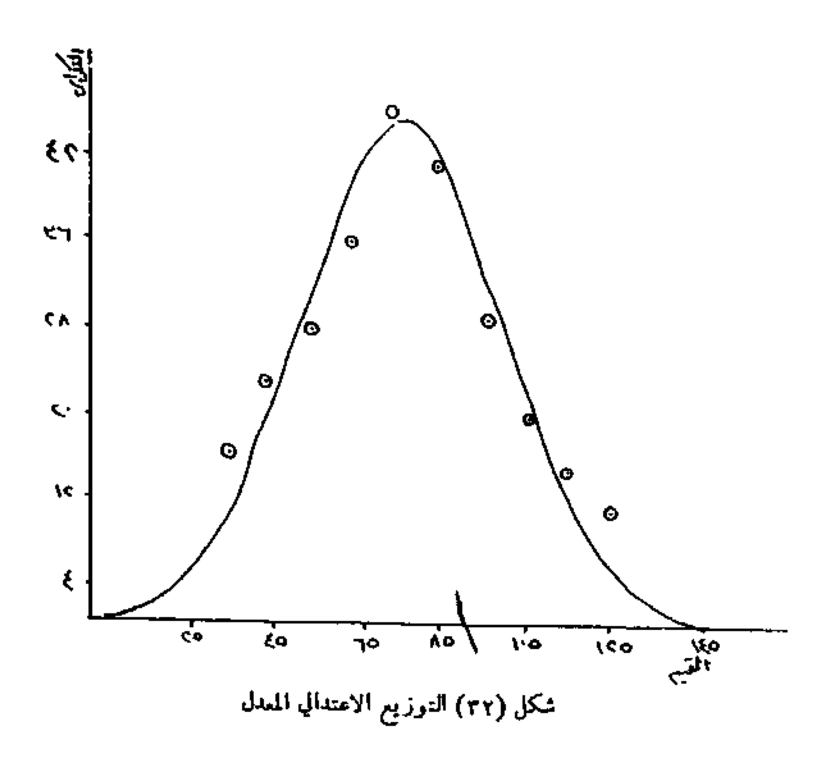
الدرجة المعيارية	ص	ك̄	ح	القيمة الأصلية
— ٣	٠.٠٠٤٤	٠,٤٩	— ٧٠.٥٠	٦.٥٠
— ٢,٥	٠,٠١٧٥	٠.٩٤	— ٥٨.٧٥	١٨,٢٥
— ٢	٠,٠٥٤٠	٥,٩٧	— ٤٧,٠٠	٣٠
١,٥٥	٠,١٢٩٥	١٤,٣٣	— ٣٥,٢٥	٤١,٧٥
— ١	٠,٢٤٢٠	٢٦,٧٧	— ٢٣,٥٠	٥٣,٥٠
— ٠,٥	٠,٣٥٢١	٣٨,٩٦	— ١١,٧٥	٦٥,٢٥
صفر	٠,٣٩٨٩	٤٤,١٣	صفر	٧٧
٠,٥	٠,٣٥٢١	٣٨,٩٦	١١,٧٥	٨٨,٧٥
١	٠,٢٤٢٠	٢٦,٧٧	٢٣,٥٠	١٠٠,٥٠
١,٥	٠,١٢٩٥	١٤,٣٣	٣٥,٢٥	١١٢,٢٥
٢	٠.٠٥٤٠	٥,٩٧	٤٧,٠٠	١٢٤,٠٠
٢,٥	٠,٠١٧٥	١,٩٤	٨٥,٧٥	١٣٥,٧٥
٣	٠,٠٠٤٤	٠.٤٩	٧٠,٥٠	١٤٧,٥٠

جدول (٥٠) العمليات اللازمة لرسم أقرب منحنى اعتدالي

وبناء على هذا الجدول يصبح المنحنى الاعتدالي المطلوب كما هو مبين في شكل (٣٢) ومنه نرى أن التوزيع الاصلي لا يبعد كثيرا عن التوزيع المعدل .

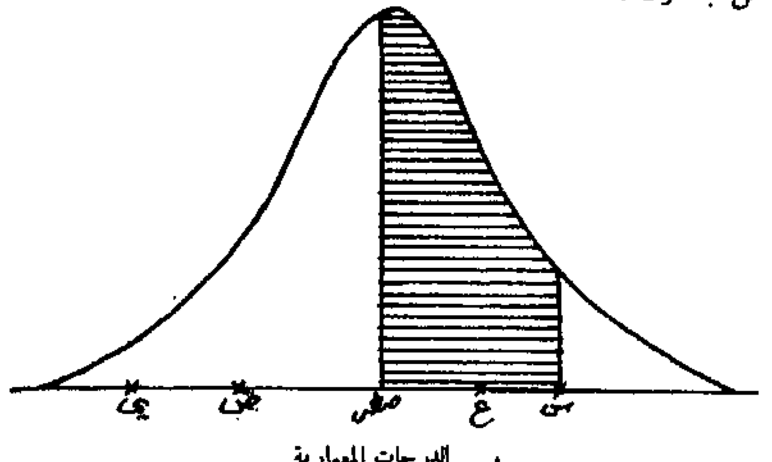
جدول المنحنى الاعتدالي ــ المساحات :

لدراسة خواص التوزيع الاعتدالي دراسة أكثر شمولا يمكن حساب النسب المئوية من التكرار الكلي التي تقع بين قيمتين من قيم التوزيع ، أو التي قد تكون أقل أو أكبر من قيمة محددة ، وهذه البيانات يتطلبها البحث في كثير من الأحيان فيتحول التوزيع الذي نتج عن البحث التجريبي الى التوزيع الاعتدالي يستطيع الباحث أن يحسب هذه النسب المئوية لو لم يتعرض بحثه لأخطاء العينة أو الصدف ، وجدول (٤٩) يعطي نسب المساحة بين نقط محددة والنقطة المعبرة عن المتوسط الحسابي للتوريع (عامود ٢) ، كما يعطي أيضا المساحة الكبرى تحت المنحنى الاعتدالي (عامود ٣) . والمساحة الصغرى (عامود ٤) عند نقطة

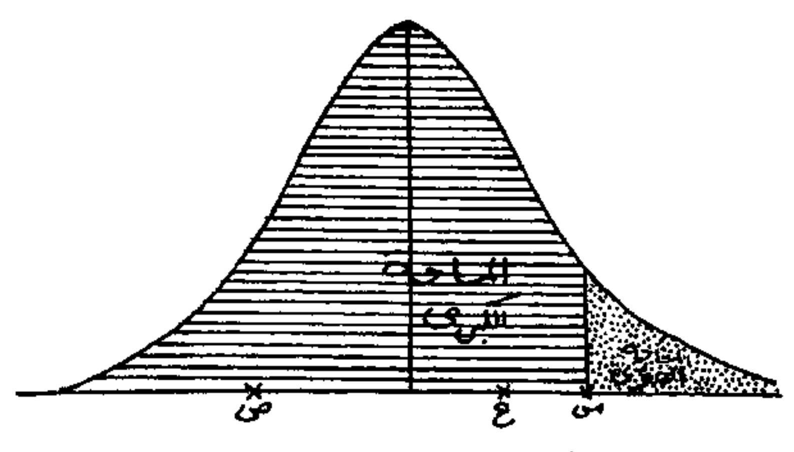


شكل (٣٢) التوزيع الاعتدالي المعدل

معينة . ويلاحظ كما سبق بيانه أن النقطة المحددة ينبغي أن تكون معبرة عن درجة معيارية لا عن قيمة من القيم الأصلية ، أي أن القيمة ينبغي أن تحول أولا الى درجة معيارية قبل استخدام جدول (٤٩) سواء كان ذلك لمعرفة الارتفاع أو المساحات المختلفة . وشكل (٣٢) يوضح ما يدل عليه العامود الثاني من جدول (٤٩) أي المساحة بين الدرجة المعيارية والمتوسط الحسابي . وشكل (٣٣) يوضح ما يدل عليه كل من العامود الثالث والرابع من الجدول .



شكل (٣٣) المساحة بين الدرجة أو المتوسط



شكل (٣٣ب) المساحة الكبرى والصغرى في المنحنى

ومن الجدول يمكن للباحث أن يحدد النسبة المئوية للحالات التي تقع بين درجتين معيارتين ، فالمساحة المحصورة بين س ، ص يمكن معرفتها من شكل (٣٢) فهي تعادل حاصل جمع المساحتين : المساحة بين س والمتوسط والمساحة بين ص والمتوسط لأن احدى النقطتين أقل من المتوسط (سالبة الاشارة) والأخرى بعده (موجبة الاشارة). أما اذا كانت النقطتان على جهة واحدة من المتوسط (كلاهما موجب الاشارة أو كلاهما سالب الاشارة) كالمساحة المحصورة بين س ، ع أو ص . م مثلا فان المساحة بينهما تعادل الفرق بين المساحتين (بين كل درجة والمتوسط) ، واذا بحثنا في شكل (٣٣) فان المساحة بين درجتين على جهتين مختلفتين من المتوسط كالقيمتين س ، ص (احداهما موجبة والثانية سالبة تكون الفرق بين المساحة الكبرى للقيمة المعيارية الموجبة والمساحة الصغرى للقيمة السالبة . أما اذا كانت القيمتان موجبتين كالمساحة بين س ، ع فان المساحة بينهما تعادل الفرق بين المساحتين الكبريين . وفي حالة الدرجتين السالبتين مثل ص ، م فان المساحة بينهما تعادل الفرق بين المساحتين الصغريين عند القيمتين .

ولبيان كيفية استخدام جدول (٤٩) لمعرفة المساحة بين درجتين معياريتين نضرب لذلك الأمثلة الآتية :

(١) المساحة المحصورة بين — ٠,٥ درجة معيارية و + ٠,٧ درجة معيارية يمكن ايجادها من الجدول بطريقتين :

من عامود (٢) تكون المساحة المطلوبة = ٠,١٩١٥ + ٢٥٨٠, = ٠,٤٤٩٥ من عامودي (٤,٣) = ٠,٧٥٨٠ — ٣٠٨٥, = ٠,٤٤٩٥

(ب) المساحة المحصورة بين + ١,٥ درجة معيارية و + ٠,٥ درجة معيارية من عامود (٢) تكون المساحة = ٠,٤٣٣٢ ـ ٠,٦٩١٥ = ٠,٢٤١٧

ومن عامود (٣) تكون المساحة = ٠,٩٣٣٢ ـ ٠,٦٩١٥ = ٠,٢٤١٧ .

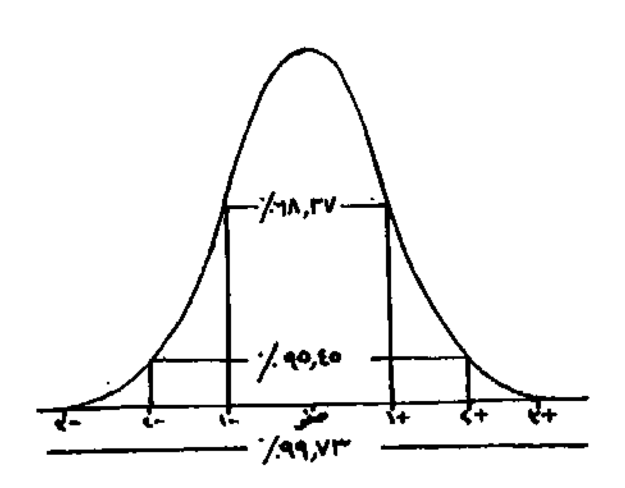
(جـ) المساحة المحصورة بين ـ ٢,٠٠ درجة معيارية ، ـ ١,٠٠ درجة معيارية . من عامود (٢) ، تكون المساحة = ,٤٧٧٢ ـ ,٣٤١٣ = ٠,١٣٥٩

ومن عامود (٤) تكون المساحة = ٠,١٥٨٧ ـ ٠,٠٢٢٨ = ٠,١٣٥٩

ومن ذلك نستطيع أن نعرف بعض خواص أخرى للمنحنى الاعتدالي ، فالمساحة المحصورة بين المتـــوسط انحراف معياري واحد . والمتوسط ـ انحراف معياري واحد = ٦٨,٢٧٪ من المساحة الكلية أي أن عدد الحالات المحصورة بين هاتين القيمتين تعادل ٦٨,٢٧٪ من مجموع القيم .

والمساحة المحصورة بين المتوسط + ضعف الانحراف المعياري والمتوسط ـ ضعف الانحراف المعياري = ٩٥,٤٥٪ من المساحة الكلية .

والمساحة المحصورة بين المتوسط + ثلاثة أمثال الانحراف المعياري والمتوسط ـ ثلاثة مثال الانحراف المعياري = ٩٩,٧٣٪ من المساحة الكلية .



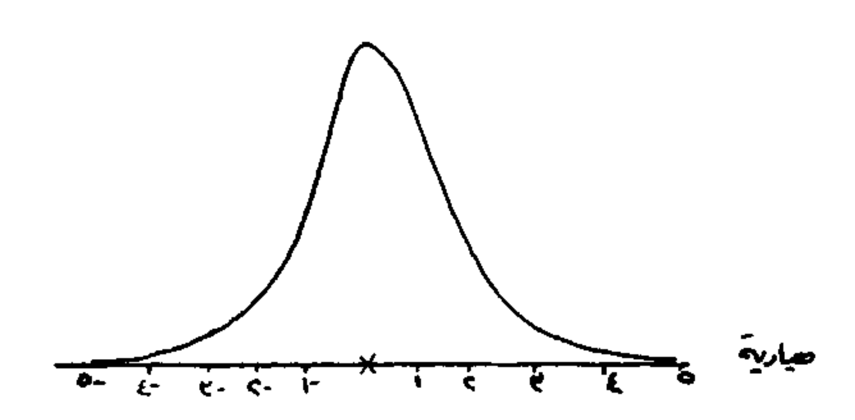
شكل (٢٤) النسبة المئوية المحصورة بين القيم المعيارية الصحيحة .

العلاقة بين المثين والدرجة المعيارية في التوزيع الاعتدالي :

ذكرنا سابقا أنه ليست هناك علاقة مباشرة بين المثين والدرجة المعيارية في أي توزيع ، ولكن في التوزيع الاعتدالي نظرا لأن التكرارات محددة بقانون رياضي يربط بينهما وبين الدرجات المعيارية ، فان العلاقة بين المثين والدرجة المعيارية تكون محددة في مثل هذا التوزيع ، وبمساعدة جداول التوزيع الاعتدالي يمكن معرفة الرتبة المثينية لأي درجة معيارية ، أو على العكس من ذلك يمكن معرفة الدرجة المعيارية المقابلة لأي رتبة مثينية ، فالرتبة المثينية المقابلة لدرجة معيارية قيمتها (+ ١) يمكن معرفتها من عامود المساحة الكبرى في جدول (٤٩) هي = ٨٤,١٣ وهكذا في كل درجة معيارية موجبة الاشارة فان الرتبة المثينية لها يمكن معرفتها من المساحة الكبرى للتوزيع ، وفي حالة الدرجات المعيارية السالبة الاشارة فان الرتبة المثينية لها يمكن معرفتها من عامود المساحة الصغرى من الجدول . فالمثين المقابل للدرجة المعيارية (— ١) = ١٥,٨٧ وعلى العكس من ذلك فيمكن عن طريق هذا الجدول تحويل الرتبة المثينية الى الدرجة المعيارية المقابلة لها ، — فالقيمة المعيارية المقابلة للمثين ٧٥,٨ مثلا هي + ٠,٧٠ والمقابلة للمثين ٢٤,٢٠ هي — ٠,٧٠ والمقابل للمثين ٧,٣٥ هي — ١,٤٥ .

مقياس T :

ذكرنا عند الكلام عن عيوب الدرجة المعيارية أنها تعطي مقياسا نصف قيمة سالبة الاشارة وأن المرحلة في هذا القياس كبيرة نسبيا . فهي تعادل انحرافا معياريا . ومقياس T الذي اقترحه McCall يتفادى هذين العيبين علاوة على ما له من مميزات أخرى فهو يتخذ وحداته معادلة $\frac{1}{10}$ الانحراف المعياري للتوزيع ففي التوزيعات العادية التي يصادفها الباحث كثيرا يبلغ مدى الانتشار حوالي ٥ أو ٦ انحرافات معيارية ، ولكن في هذا المقياس يكون المدى حوالي ٥٠ أو ٦٠ وحدة ، وأكثر من ذلك فان اتساع توزيع مقياس T يمتد أكثر مما يمتد اليه أي مقياس متوقع حيث يبلغ مدى التوزيع في هذا المقياس ١٠ انحرافات معيارية أو ١٠٠ وحدة من مقياس T وقد دلت التجارب العملية أن مثل هذا الاتساع في التوزيع قل أن تخرج عنه أية قيمة . ويبدأ مقياس T لا بقيم سالبه الاشارة كما هو الحال في المقياس المعياري بل يبدأ بنقطة الصفر ويمتد حتى ١٠٠ جاعلا المتوسط عند ٥٠ كما يتضح ذلك من شكل (٣٥) .



تائية ١٠٠ ٩٠ ٨٠ ٧٠ ٦٠ ٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠ صفر

شكل (٣٥) المقياس التائي

وقد أعد جدول يساعد الباحث على تحويل القيم العادية في أي جدول تكراري الى درجة تائية بعد معرفة ما يبلغه عدد القيم التي أقل من القيمة المطلوبة بالنسبة للمجموع الكلي للقيم . ولذلك فان تحويل أية قيمة الى قيمة تائية يتطلب حساب التكرار المتجمع والتكرار التجمعي المئوي . هذا ويمكن توضيح الخطوات اللازمة لهذا الحساب بما هو مبين في الجدول الآتي وهو يبين توزيع درجات ٢٠٠ طالب في اختبار القبـــول :

وتنحصر الخطوات التي اتبعت في تحويل القيم الى درجة تائية فيما يأتي :

١ ــ تحسب الحدود العليا للفئات (عامود ٣) .

٢ ــ حول التكرارات في الجدول الى تكرارات تجمعية (عامود ٤) .

٣ ــ حول التكرارات التجمعية الى تكرارات تجمعية نسبية (عامود ٥) أيــ محسوبة بنسبة مجموع القيم .

(١) الدرجات	(٢) التكرار	(٣) الحدود العليا للفئات	(٤) التكرار المتجمع الصاعد	(٥) التكرار التجمعي النسبي	(٦) الدرجة التائية
صفر –	٢	٣	٢	٠,٠١٠	٢٦,٧
٣	—	٦	٢	٠,٠١٠	٢٦,٧
٦ –	٤	٩	٦	٠,٠٣٠	٣١,٢
٩ –	٨	١٢	١٤	٠,٠٧٠	٣٥,٢
أ٢ –	١٥	١٥	٢٩	٠,١٤٥	٣٩,٤
١٥ –	٣٢	١٨	٦١	٠,٣٠٥	٤٤,٩
١٨ –	٣٥	٢١	٩٦	٠,٤٨٠	٤٠,٩
٢١ –	٣٢	٢٤	١٢٨	٠,٦٤٠	٥٣,٦
٢٤ –	٣٠	٢٧	١٥٨	٠,٧٩٠	٥٨,١
٢٧ –	١٨	٣٠	١٧٦	٠,٨٨٠	٦١,٧
٣٠ –	١٥	٣٣	١٩١	٠,٩٥٥	٦٦,٩
٣٣ –	٨	٣٦	١٩٩	٠,٩٩٥	٧٥,٨
٣٦ –	١	٣٩	٢٠٠	١,٠٠٠	—
المجموع	٢٠٠				

جدول (٥١) تحويل القيم إلى درجات تائية

٤ – الخطوة الأخيرة تحتاج الى الجدول الذي يساعد في تحويل التكرارات التجمعية النسبية الى قيم تائية . واليك فيما يلي هذا الجدول المساعد :

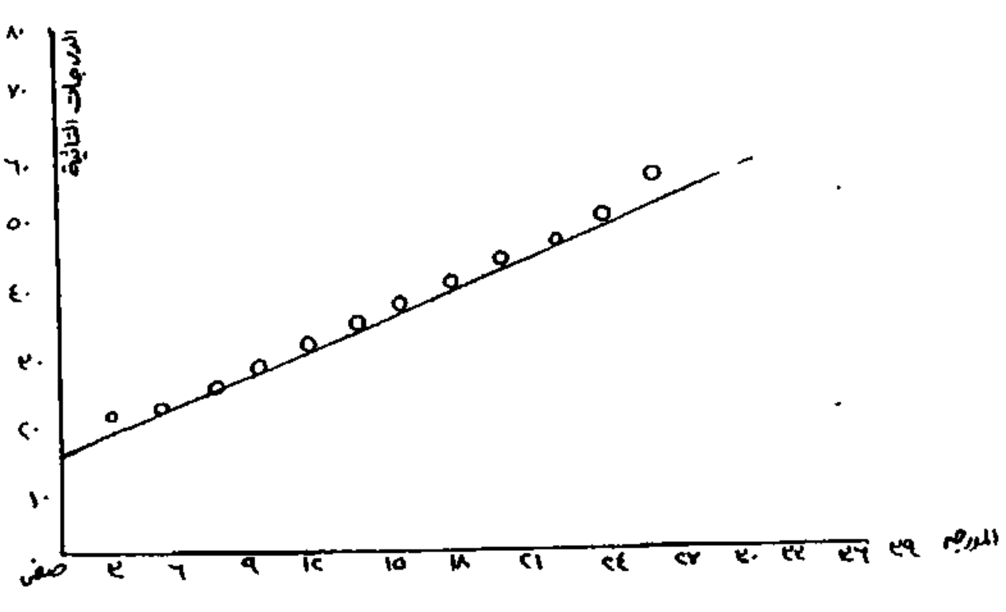
الجزء قبل القيمة	الدرجة التائية	الجزء قبل القيمة	الدرجة التائية	الجزء قبل القيمة	الدرجة التائية
,٠٠٠٥	١٧,١	,١٦٠	٤٠,١	,٩٤٠	٦٥,٥
,٠٠٠٧	١٨,١	,١٨٠	٤٠,٨	,٩٥٠	٦٦,٤
,٠٠١٠	١٩,١	,٢٠٠	٤١,٦	,٩٦٠	٦٧,٥
,٠٠١٥	٢٠,٣	,٢٢٠	٤٢,٣	,٩٦٥	٦٨,١
,٠٠٢٠	٢١,٢	,٢٥٠	٤٣,٣	,٩٧٠	٦٨,٨
,٠٠٢٥	٢١,٩	,٣٠٠	٤٤,٨	,٩٧٥	٦٩,٦
,٠٠٣٠	٢٢,٥	,٣٥٠	٤٦,١	,٩٨٠	٧٠,٥
,٠٠٤٠	٢٣,٥	,٤٠٠	٤٧,٥	,٩٨٥	٧١,٧
,٠٠٥٠	٢٤,٢	,٤٥٠	٤٨,٧	,٩٠٠	٧٣,٣
,٠٠٧٠	٢٥,٤	,٥٠٠	٥٠,٠	,٩٩٣	٧٤,٦
,٠١٠	٢٦,٧	,٥٥٠	٥١,٣	,٩٩٥	٧٥,٨
,٠١٥	٢٨,٣	,٦٠٠	٥٢,٥	,٩٩٦٠	٧٦,٥
,٠٢٠	٢٩,٥	,٦٥٠	٥٣,٩	,٩٩٧٠	٧٧,٥
,٠٢٥	٣٠,٤	,٧٠٠	٥٥,٢	,٩٩٧٥	٧٨,١
,٠٣٠	٣١,٢	,٧١٠	٥٦.٧	,٩٩٨٠	٧٨,٧
,٠٣٥	٣١,٩	,٧٨٠	٥٧,٧	,٩٩٨٥	٧٩,٧
,٠٤٠	٣٢,٥	,٨٠٠	٥٨,٤	,٩٩٩٠	٨٠,٩
,٠٥٠	٣٣,٦	,٨٢٠	٥٩,٢	,٩٩٩٣	٨١,٩
,٠٦٠	٣٤,٥	,٨٤٠	٥٩,٩	,٩٩٩٥	٨٢,٩
,٠٧٠	٣٥,٢	,٨٦٠	٦٠,٨		
,٠٨٠	٣٥,٩	,٨٨٠	٦١,٧		
,٠٩٠	٣٦,٦	,٩٠٠	٦٢,٨		
,١٠٠	٣٧,٢	,٩١٠	٦٣,٤		
,١٢٠	٣٨,٣	,٩٢٠	٦٤,١		
,١٤٠	٣٩,٢	,٩٣٠	٦٤,٨		

جدول (٥٢) التحويل إلى الدرجات التائية

فمثلا الدرجة التائية المقابلة للجزء ٠,٠٠١٠ في الجدول هي ١٩,١ والمقابلة للجزء ٠,٦٥٠ هي ٥٣,٩ .

٥ — ولكي يتسنى تحويل أية درجة من درجات التوزيع مباشرة الى الدرجة التائية المقابلة لها يرسم عادة تخطيط يوضح العلاقة بين القيمة الأصلية والدرجات التائية ، ويمثل هذه العلاقة عادة خط مستقيم ، الا أن بعض التكرارات الشاذة في الجدول قد تبعد قليلا من النقط بعض الشيء عن المستقيم الذي يصف هذه العلاقة .

٦ — ومن هذا المستقيم الذي يربط بين القيم الأصلية والدرجات التائية يمكن بعد ذلك تحويل أية قيمة الى الدرجات التائية المقابلة لها .



شكل (٣٦) العلاقة بين القيم الأصلية والدرجات التائية

تلخيص لخواص المنحنى الاعتدالي :

بناء على كل ما سبقت دراسته يمكن أن نلخص خواص المنحنى الاعتدالي فيما يلي :

١ — المنحنى الاعتدالي منحنى متماثل يرتفع عند الوسط تماما وينخفض تدريجيا حتى يقل ارتفاعه جدا عند الطرفين .

٢ — المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الاعتدالي لها قيمة واحدة .

٣ – في التوزيع الاعتدالي تكون نسبة حالات التوزيع المحصورة بين المتوسط الحسابي – ١ انحراف معياري والمتوسط الحسابي + ١ انحراف معياري = ٦٨,٢٧٪من الحـــالات

وبين المتوسط الحسابي – ٢ انحراف معياري والمتوسط الحسابي = ٢ انحراف معياري = ٩٥,٤٤ ٪

وبين المتوسط الحسابي – ٣ انحراف معياري والمتوسط الحسابي + ٣ انحراف معياري = ٩٩,٧٣ ٪ (أي جميع قيم المجموعة تقريبا) أي أن مدى القيم في هذا التوزيع يبلغ حوالي ثلاثة أمثال الانحراف المعياري على جانبي المتوسط .

٤ – يلاحظ في المنحنى الاعتدالي أن نقطتي تحول المنحنى أي النقطتين اللتين يبدأ فيهما المنحنى أن يغير اتجاهه تقابل القيمتين م + ع ، م – ع .

مقاييس الانحراف عن التوزيع الاعتدالي :

١ – الالتواء Skewness

ذكرنا سابقا أن توزيع القيم في أي بحث عملي لا يمكن أن ينطبق انطباقا تاما على التوزيع الاعتدالي النموذجي ، ولكن انحراف التوزيع عن هذا النموذج قد يكون قليلا ليس له دلالة احصائية ناتجا عن ظروف البحث الخاصة ، أو قد يكون كبيرا لدرجة لا يستطيع الباحث معه افتراض التوزيع الاعتدالي في القيم التي يحصل عليها . وانحراف التوزيع عن الاعتدالي قد يتخذ شكلا بحيث يجعل المنحنى يميل ناحية القيم الصغيرة يوصف بأنه موجب الالتواء والذي يميل ناحية القيم الكبيرة بأنه سالب الالتواء .

ولفهم الأساس الذي ينبني عليه مقياس الالتواء نعيد الملاحظة التي سبق ذكرها في خواص المنحنى الاعتدالي ، وهي أن المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متحدة القيمة وأما في المنحنيات الملتوية فان هذه المعاملات تكون مختلفة القيمة . وقد سبق توضيح المواضع النسبية لها في نوعي المنحنيـــات الملتوية فنحن نلاحظ أنـــه في المنحنى السالب الالتواء يكون المنوال أعلى قيمة من المتوسط الحسابي ، بينما العكس في الالتواء الموجب .

وعلى هذا الأساس يمكن حساب معامل الالتواء على أنه الفرق بين المتوسط والمنوال أي = المتوسط – المنوال ، الا أن معاملا كهذا يعطي قيمة مطلقة تتوقف على تشتت القيم فهو لا يصلح الا في مقارنة التواء مجموعتين متحدتي الانحراف المعياري . أما اذا أردنا

الحصول على مقياس نسبي للالتواء فان هذا المقياس يكون معادلا $\frac{\text{المتوسط الحسابي – المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

ولكن الصعوبة في مثل هذا المقياس أن المنوال ليس من السهل تحديد قيمته بدقة ، ولهذا يستعاض عنه بالوسيط مع تعديل طفيف في المعامل السابق فيصبح معامل الالتواء =

$$\frac{\text{٣ (المتوسط الحسابي – الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

وهذا المعامل استنتجه K. Pearson

ففي الجدول التكراري الآتي الذي يوضح توزيع العمر وقت الوفاة لعدد من الاشخاص يمكن حساب معامل الالتواء كما يلي :

الفئـــات	التكرار ك	التكرار المتجمع الصاعد	ح̄	ك ح̄	ك ح̄²
٣٥ —	٧	٧	— ٧	— ٤٩	٣٤٣
٤٠ —	١٠	١٧	— ٦	— ٦٠	٣٦٠
٤٥ —	٢٥	٤٢	— ٥	— ١٢٥	٦٢٥
٥٠ —	٣٥	٧٧	— ٤	— ١٤٠	٥٦٠
٥٥ —	٥٠	١٢٧	— ٣	— ١٥٠	٤٥٠
٦٠ —	٨٠	٢٠٧	— ٢	— ١٦٠	٣٢٠
٦٥ —	٩٠	٣٠٢	— ١	— ٩٠	٩٠
٧٠ —	١١٥	٤١٧	صفر	صفر	—
٧٥ —	١٣٥	٥٥٢	١	١٣٥	١٣٥
٨٠ —	١٠٥	٦٥٧	٢	٢١٠	٤٢٠
٨٥ —	٥٣	٧١٠	٣	١٥٩	٤٧٧
٩٠ —	٣٥	٧٤٥	٤	١٤٠	٥٦٠
٩٥ —	٣	٧٤٨	٥	١٥	٧٥
١٠٠ فمافوق[1]	٢	٧٥٠	٦	١٢	٧٢
المجموع	٧٥٠			٦٧١ — ٦٨٤ — ١٣	٤٤٨٧

جدول (٥٣) توزيع العمر وقت الوفاة لعدد من الاشخاص

(١) هذه الفئة اعتبرت قيمتها المركزية تجاوزا ١٠٢٫٥

رتبة الوسيط = $\frac{٧٥٠}{٢} = ٣٧٥$

قيمة الوسيط = $٧٠ + \frac{٧٣}{١١٠} \times ٥ = ٧٣,١٧$

قيمة المتوسط الحسابي = $٧٢,٥ - \frac{١٣}{٧٥٠} \times ٥ = ٧٢,٤١$

والانحراف المعياري = $٥ \sqrt{\frac{٤٤٨٧}{٧٥٠} - \left(\frac{١٣}{٧٥٠}\right)^{٢}} = ١٢,٢٠$

∴ معامل الالتواء حسب هذا القانون

$$= \frac{٣\ (٧٣,١٧ - ٧٢,٤١)}{١٢,٢٠}$$

$$= -\ ٠,١٩$$

هذا ويمكن قياس التواء التوزيع باستخدام معامل آخر مبنى على ايجاد الربيعات Quartiles ، فاذا كان التوزيع باستخدام معامل آخر مبنى على ايجاد منتصف المسافة بين الربيع الأول والثالث تماما ، اذا كان التوزيع ملتويا نحو القيم الصغيرة ، أي موجب الالتواء ، كان بعد الربيع الثالث عن الربيع الثاني أكبر من بعد الربيع الثاني عن الربيع الأول . وتبعا لهذا الأساس فان $(\text{ر}_٣ - \text{ر}_٢) - (\text{ر}_٢ - \text{ر}_١)$ يصلح مقياسا للالتواء أو $\text{ر}_١ + \text{ر}_٣ - ٢\,\text{ر}_٢$ ، الا أن هذا يكون بطبيعة الحال مقياسا مطلقا، واذا أردنا تحويله الى مقياس نسبي قسمناه على نصف المدى الربيعي فيصبح :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{ر}_١ + \text{ر}_٣ - ٢\,\text{ر}_٢}{\frac{\text{ر}_٣ - \text{ر}_١}{٢}}$$

وقد وجد أن هذا المعامل تتراوح قيمته بين − ٢ ، + ٢ ولذلك يكون الأفضل أن يصبح المعامل :

$$\frac{\text{ر}_١ + \text{ر}_٣ - ٢\,\text{ر}_٢}{\text{ر}_٣ - \text{ر}_١}$$

على أن تتراوح قيمته بين − ١ ، + ١

فاذا طبقنا هذا المعامل على جدول (٥٧) نجد أن :

رتبة ر١ = ٧٥٠ / ٤ = ١٨٧,٥

وقيمتـــه = ٦٠ + ٦٠,٥ / ٨٠ × ٥ = ٦٣,٧٨

ورتبة ر٣ = ١٨٧,٥ × ٣ = ٥٦٢,٥

وقيمتـه = ٨٠ + ١٠,٥ / ١٠٥ × ٥ = ٨٠,٥٠

فيكون معامل الالتواء تبعا لهذا القانون

= (٦٣,٧٨ + ٨٠,٥٠ − ٢ × ٧٣,١٧) / (٨٠,٥٠ − ٦٣,٧٨)

= − ٠,١٢

وهذا المعامل لا يتأثر مطلقا بالقيم الموجودة في الربع الأول أو الربع الأخير من المجموعة ، بل يقصر حسابه على النصف المتوسط من القيم . فلكي نستخدم مقياسا أكثر حساسية يمكننا أن نستخدم المئين العاشر والمئين التسعين ، ونقارن بين بعديهما عن المئين الخمسين (أي الوسيط) ويكون حدي هذا المعامل كذلك − ١ ، + ١ .

والمعامل في الحالة الأخيرة .

= (م١٠ + م٩٠ − ٢ م٥٠) / (م٩٠ − م١٠)

وتصبح خطوات ايجاد هذا المعامل في جدول (٥١) كما يلي :

م١٠ (ورتبته = ٧٥) = ٥٠ + ٣٢ / ٣٥ × ٥ = ٥٤,٧١

م٩٠ (ورتبته = ٦٧٥) = ٨٥ + ١٨ / ٥٣ × ٥ = ٨٦,٧٠

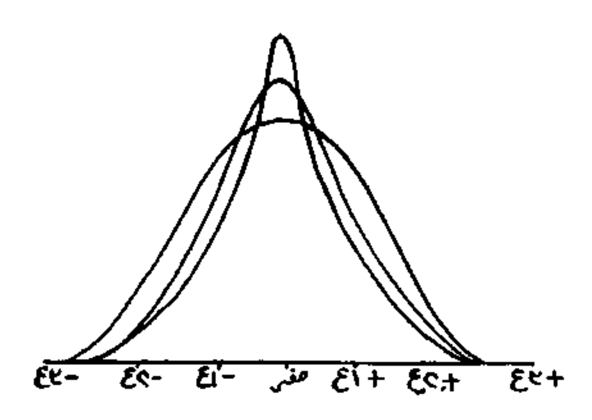
فيكون معامل الالتواء

= (٥٤,٧١ + ٨٦,٧٠ − ٢ × ٧٣,١٧) / (٨٦,٧٠ − ٥٤,٧١) = − ٠,١٥

٢ – التفرطح Kurtosis

ان معامل التفرطح يبين ما اذا كان للتوزيع قمة حادة رفيعة أو قمة عريضة مسطحة ، ويطلق على التوزيع الذي من النوع الأول اسم التوزيع مدبب التفرطح Lepto Kurtic ومن النوع الثاني التوزيع المسطح التفرطح Platy Kurtic .

ومن الطبيعي أن صفة التفرطح ليست لها علاقة بالمتوسط الحسابي للتوزيع ، فقد يكون التوزيع رفيعا أو مسطحا أو اعتداليا ويكون له متوسط حسابي محدد كما في شكل (٣٧) كما أن زيادة التفرطح أو قلته لا تتعارض مع تماثل التوزيع أي أن التوزيع المتماثل قد يكون رفيع التفرطح أو مسطحه أو متوسطه (Meso Kurtic) .



شكل (٣٧) منحنيات متحدة المتوسط مختلفة التفرطح

ويمكن قياس التفرطح بالمعامل الآتي :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{ر}{م_{٩٠} - م_{١٠}}$$

$$= \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{المئين التسعين} - \text{المئين العاشر}}$$

فلكي نحسب معامل التفرطح للتوزيع السابق (جدول ٥٩)

$$\text{نجد أن نصف المدى الربيعي (ر)} = \frac{٨٠,٥٠ - ٦٣,٧٨}{٢} = ٨,٣٦$$

المئين التسعين $م_{٩٠}$ = ٨٦,٧٠

والمئين العاشر $م_{١٠}$ ٥٤,٧٢

$$\therefore \text{معامل التفرطح} = \frac{٨,٣٦}{٣١,٩٩} = ٠,٢٦١$$

ولمعرفة درجة تفرطح أي توزيع ونوعه ينبغي أن نقارن هذا المعامل بمقياس يتخذ أساسا لذلك . ومن المتبع أن يقارن هذا بمعامل التفرطح المقابل له في المنحنى الاعتدالي ، وبحساب هذا المعامل في المنحنى الاعتدالي نجد أن قيمته تعادل ٠,٢٦٣ فاذا زاد المعامل عن هذه القيمة يكون التوزيع مسطحا Platy Kurtic واذا قل عنها كان التوزيع مدببـــا Lepto Kurtic : وفي هذا التوزيع (جدول٥٩) نجد أن المعامل قريب قربا كافيا من القيمة المقابلة له في المنحنى الاعتدالي .

والمهم بعد حساب معامل الالتواء أو المعامل التفرطح معرفة ما اذا كان انحراف شكل التوزيع عن الاعتدالي كبيرا لدرجة تحتم علينا أن نصف التوزيع بأنه ملتو أو مفرطح . فمن الطبيعي أن هناك حدا لأي معامل من هذا القبيل نتغاضى عما دونه ، بحيث لو زاد الانحراف عنه قيل أن للانحراف دلالة احصائية وسيأتي تفصيل ذلك عند الكلام عن مقاييس الدلالة .

أسئلة على الباب الرابــع

(١) طبق اختبار للهجاء على مجموعة من التلاميذ فكان توزيع درجاتهم كما هو مبين في الجدول التكراري الآتي :

فئـــــــات	التكرار
١٠ –	١٥
١٢ –	٢٧
١٤ –	٣٥
١٦ –	٥٥
١٨ –	٧٥
٢٠ –	٢٤
٢٢ –	٣٩
٢٤ =	٢٠
٢٦ –	٢٥
٢٨ –	١٨
٣٠ –	٧
٣٢ –	–
٣٤ –	٢
المجموع	٣٦٠

جدول (٥٤) توزيع درجات اختبار الهجاء

حول هذا التوزيع الى توزيع اعتدالي .

(٢) قارن بالرسم بين التوزيع الأصلي والتوزيع الاعتدالي المعدل .

(۳) احسب كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع الاعتدالي المعدل لجدول (٥٤) وقارن بينها وبين المتوسط الحسابي والانحراف المعياري الأصلي .

(٤) احسب معامل الالتواء للتوزيع الأصلي (جدول ٦۰) بطريقتين مختلفتين وقارن بين الناتجين .

(٥) أوجد المساحة المحددة تحت المنحنى الاعتدالي بين الدرجات المعيارية الآتيـة والمتوسط مستخدما في ذلك جدول (٥٥) .

,۰۹ ، –۲,۷ ، ۱,٦ ، –۱,٤ ، ۲,٥

(٦) أوجد المساحة المحددة تحت المنحنى الاعتدالي بين كل درجتين معياريتين مما يـأتي :

أ – بين ۲,٥ ، –۱,۳

ب – بين –۳,۱ ، ۱,٤

جـ – بين –۱,۷ ، ۲,۹

د – بين ۱,٤ ، ۳,۱

(۷) في جدول (٦۰) أوجد عدد الحالات التي يتوقع لها أن تقع قبل الدرجات الآتية حسب ما ينتظر في التوزيع الاعتدالي :

۱٥ ، ۱۹ ، ۲۲ ، ۳۱ .

(۸) في جدول (٦۰) احسب النسب المئوية للقيم التي تقع بين :

أ) المتوسط الحسابي – انحراف معياري والمتوسط الحسابي + انحراف معياري .

ب) المتوسط الحسابي – ضعف الانحراف معياري والمتوسط الحسابي + ضعف الانحراف المعيـاري .

جـ) المتوسط الحسابي – ثلاثة أمثال الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي + ثلاثة أمثال الانحراف المعياري وقارن بين هذه النسب وما يتوقع لها اذا كان التوزيع اعتدالياً .

الباب الخامس

الارتبـــاط Correlation

= مقدمـــة

= معـــامل الارتبـــاط

تخطيط الانتشـــار

معامل ارتباط الرتب

معامل ارتباط بيرسون

الارتباط الثنـــائي

معامل التـــوافق

خاتمة في معامل الارتباط

تفسير نتائج الارتبـــاط

متى تستخدم كل معـــامل



مقدمـــة :

كانت الأجزاء السابقة متعلقة بدراسة وقياس متغير واحد ، فمقاييس النزعة المركزية توضح القيمة التي يتجمع عندها متغير في مجموعة من المقاييس . ومقاييس التشتت توضح درجة انتشار وتوزيع قيم المتغير ، الا أن البحث العلمي لا يقف عند حد الوصف والتصنيف بل يتعدى ذلك الى بيان نوع العلاقة بين الحقائق والمفهومات العلمية ووصفها وصفا علميا دقيقا ، وهذا يدخل ضمن مجال الاحصاء الوقوف على طبيعة العلاقة بين أكثر من متغير واحد والوصول الى معامل عددي لوصف هذه العلاقة .

وقد سبق أن ذكرنا في الباب الأول عند الكلام عن طريقة التلازم في التغير كيف يستطيع الباحث أن يعبر تعبيرا علميا عن وصف نوع التلازم في تغيير عاملين أو متغيرين ومداه ، ونبحث في هذا الباب الطرق الاحصائية للحصول على معامل عددي يصف نوع ومدى هذا التلازم . وعن طريق هذا التعبير العددي يتسى للباحث أن يصدر تنبؤات عن أحد المتغيرات بفضل ما يعرفه عن متغير آخر . وقد ذكرنا أن أنواع العلاقة بين متغيرين يمكن تلخيصها فيما يلي :

١ ــ علاقة مطردة كاملة .
٢ ــ علاقة مطردة ناقصة .
٣ ــ علاقة صفرية أو معدومة .
٤ ــ علاقة عكسية ناقصة .
٥ ــ علاقة عكسية كاملة .

معـــامل الارتبـــاط :

ويطلق على المعامل الذي يصف نوع العلاقة بين متغيرين « معامل الارتباط » Correlation Coefficient وتنحصر قيمته بين + ١ ، ــ ١فاذا كانت العلاقة مطردة كاملة

(كالعلاقة بين قطر الدائرة ومحيطها) كانت قيمة معامل الارتباط + ١ واذا كانت العلاقة عكسية كاملة (كالعلاقة بين حجم الغاز وضغطه في حدود معينة) كـــانت قيمته ـ ١ ، وقد ذكرنا أن الارتباط الكامل لا وجود له في الظواهر الطبيعية ، وأن المعامل الناتج في الأبحاث النفسية أو التربوية أو الاجتماعية يكون عادة كسرا موجبا أو ســـالبا .

تخطيـــط الانتشـــار :

لنفرض أن باحثا أراد ايجاد معامل الارتباط بين عمر الزوج وعمر الزوجة في مجموعة من الأشخاص وكانت الأعمار كما هي مبينة فيما يأتي :

عمر الزوج	عمر الزوجة	عمر الزوج	عمر الزوجة
٣٧	٣٢	٥٨	٥٥
٤٥	٣٩	٤٩	٣٧
٢٦	٢٠	٦٥	٦٥
٤٩	٥٢	٢٨	١٨
٣٦	٢٠	٧٢	٧٠
٣٥	٣٠	٢٩	٢٥
٤٦	٣٩	١٨	١٨
٢٩	٢٢	٣٨	٤٧
٢٥	٢٢	٤٦	٤٠
٨١	٥٢	٤٩	٤٥
٢٦	٢٥	٣٦	٣٥
٤٤	٢٠	٤٨	٢٩
٢٢	٤٠	٣٥	٣٠
٤٦	٣٢	٢٥	٢٥
٢٩	٢٢	٣٨	٣٦
٤٤	٣٢	٨٩	٨٠
٣٥	٣٢	٤٧	٤٥
٣٦	٣٠	٥٥	٤٩

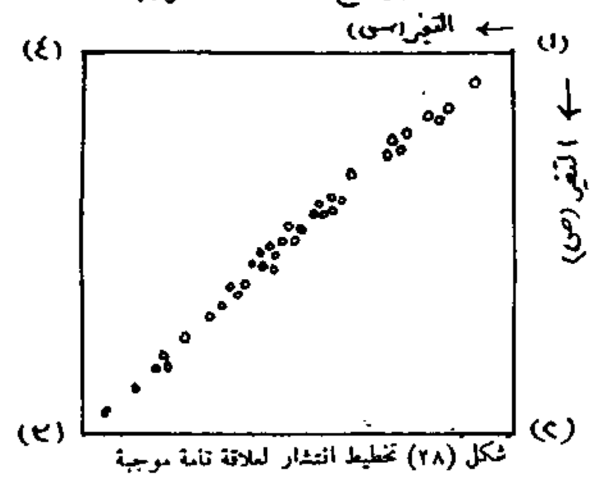
عمر الزوج	عمر الزوجة	عمر الزوج	عمر الزوجة
٧٦	٥٢	٦٩	٤٨
١٨	١٧	٢٩	٢٢
٣٩	٣٢	٢٥	٢٠
٨٦	٧٠	٥٥	٤٩
٦٦	٦٢	٤٩	٣٠
٤٥	٤٣	٦٢	٥٨
٦٩	٦١	٥٨	٥٠

فان هذه البيانات يمكن تفريغها في جدول تكراري مزدوج يبين العلاقة بين هذين المتغيرين (جدول ٥٥) بحيث يمثل كل خط فيه أحد هذه البيانات الخمسين ، أي يمثل كل خط عمر الزوج وعمر الزوجة معا . فالبيان الأول الذي فيه عمر الزوج ٣٧ وعمر الزوجة ٣٢ يمثل بخط عند تلاقي العامود الذي يمثل عمر الزوج عند ما يكون محصورا بين ٣٥ ، ٤٠ مع الصف الذي يمثل عمر الزوجة عند ما يكون محصورا بين ٣٠ ، ٣٥ . والبيان المشتمل على عمر الزوج ٥٨ وعمر الزوجة ٥٥ يمثله خط عند تلاقي العامود الذي يمثل الزوج عندما يكون محصورا بين ٥٥ ، ٦٠ والصف الذي يمثل عمر الزوجة عند ما يكون محصورا بين ٥٥ ، ٦٠ والجدول التكراري المزدوج لهذه البيانات يكـــــون كالآتي :

الزوجة / الزوج	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	٨٥-	المجموع
١٥-	//		/													٣
٢٠-			/////		/	/										٧
٢٥-			////						/							٥
٣٠-					//////	/	//									٩
٣٥-					///		////									٧
٤٠-		/					//									٣
٤٥-							//		/		/					٤
٥٠-							/		/				/	/		٤
٥٥-									/	/						٢
٦٠-											//					٢
٦٥-											/					١
٧٠-												/			/	٢
٧٥-																—
٨٠-															/	١
المجموع	٢	١	١٠	—	١٠	٢	١١	—	٤	١	٤	١	١	١	٢	٥٠

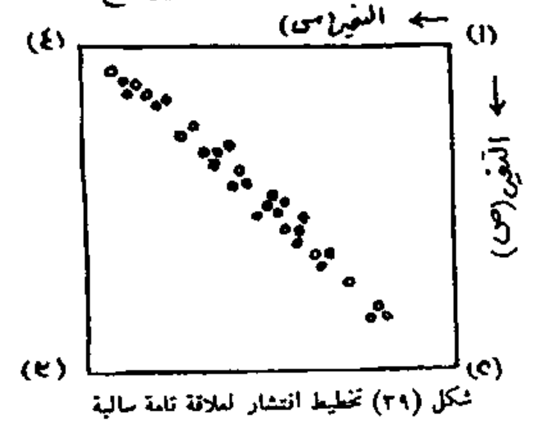
جدول (٥٥) جدول مزدوج لأعمار الزوج والزوجة

ومن هذا الجدول يمكن عن طريق ملاحظة اتجاه تجمع التكرارات تكوين فكرة تقريبية عن نوع الارتباط وقدره ، ولكي تقرب هذا للأذهان تفترض احدى الحالات التي يكون فيها الارتباط تاما موجبا بين متغيرين (س) (ص) فاننا نلاحظ أن جميع التكرارات تكون متجمعة في خط مستقيم هو قطر الشكل الذي يصل بين الركن (١) والركن (٣) . وذلك لأن جميع القيم الصغيرة في أحد المتغيرين يتبعها قيم صغيرة في المتغير الآخر . وكلما كبرت القيمة في أحد المتغيرين كبرت القيمة المقابلة لها في المتغير الآخر . وفي شكل (٣٨) تخطيط انتشار يوضح هذه العلاقة الموجبة التامة .



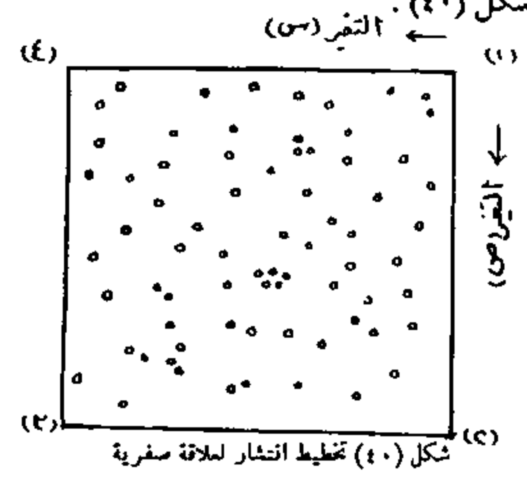
شكل (٢٨) تخطيط انتشار لعلاقة تامة موجبة

أما اذا كانت العلاقة تامة سالبة (ـ ١) تجمعت نقط التكرار في القطر الذي يربط بين الركنين (٤) ، (٢) في تخطيط الانتشار . وذلك لأن القيم الكبيرة في أحد المتغيرين تتبعها قيم صغيرة في المتغير الآخر . وكلما كبرت القيم في أحدهما صغرت في الآخر والعكس بالعكس ، وفي شكل (٣٩) تخطيط انتشار يوضح هذه العلاقة السالبة التامة .



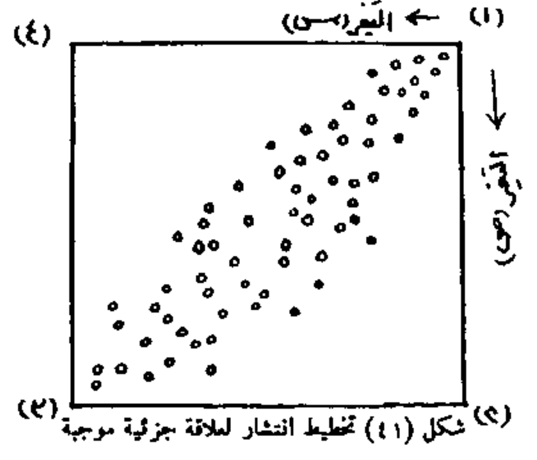
شكل (٢٩) تخطيط انتشار لعلاقة تامة سالبة

أما اذا كانت العلاقة صفرية ، أي أنه ليس هناك أي اتجاه للاتفاق أو التضاد بين المتغيرين ، فان نقط التكرار تكون موزعة على الشكل دون أن يبدو أي اتجاه في تجمعها كما هو الحال في شكل (٤٠) .



شكل (٤٠) تخطيط انتشار لعلاقة صفرية

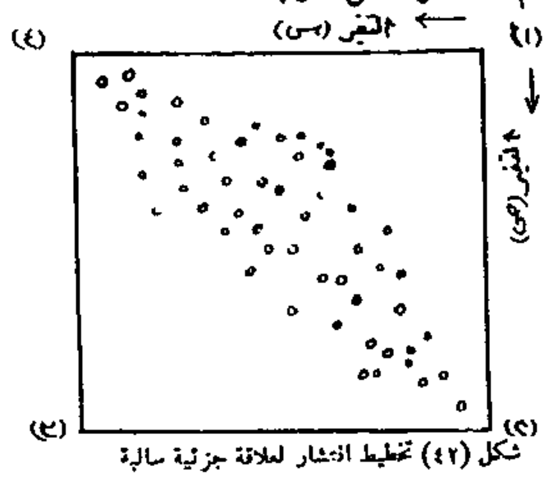
وفي حالة العلاقة الجزئية ، سواء كانت موجبة أو سالبة ، نجد أن انتشار التكرار يتخذ اتجاها عاما ، الا أن هذا الاتجاه يتبع عادة شكلا بيضيا . وكلما اتسع الشكل البيضي قلت قيمة الارتباط بين المتغيرين ، وكلما ضاق زادت قيمته ، حتى تصل أقصاها عند ما يصبح الشكل البيضي خطا محددا كما هو الحال في شكل (٣٨) ، (٣٩) . وشكل (٤١) يوضح تخطيطا انتشاريا لعلاقة جزئية موجبة وشكل (٤٢) لعلاقة جزئية سالبة .



شكل (٤١) تخطيط انتشار لعلاقة جزئية موجبة

فكأن مجرد ملاحظة التوزيع في تخطيط الانتشار يفيد في معرفة مدى العلاقة بين المتغيرين ونوعها : ولكن الاحصاء لا يقف أيضا عند حد ملاحظة التوزيع ووصف

العلاقة وصفا تقريبيا بل تهدف دائما الى التوصل الى قياس عددي لهذه العلاقة . وقد ذكرنا أن المعامل المستخدم لذلك هو معامل الارتباط .



شكل (٤٢) تخطيط انتشار لعلاقة جزئية سالبة

وهناك وسائل أخرى كثيرة لايجاد معامل الارتباط بين متغيرين تختلف باختلاف هدف البحث وظروفه ، فقد لا يكون من الممكن سوى تقسيم كل من المتغيرين أو أحدهما تقسيما نوعيا ، أو ترتيبها من حيث القيمة دون التوصل الى تحديد قيمة عددية لكل رتبة من رتب المتغير ، مثل هذه الظروف تحتم على الباحث استخدام احدى طرق ايجاد معامل الارتباط دون غيرها . واليك أهم الطرق المستخدمة في ذلك :

معامل ارتباط الرتب :

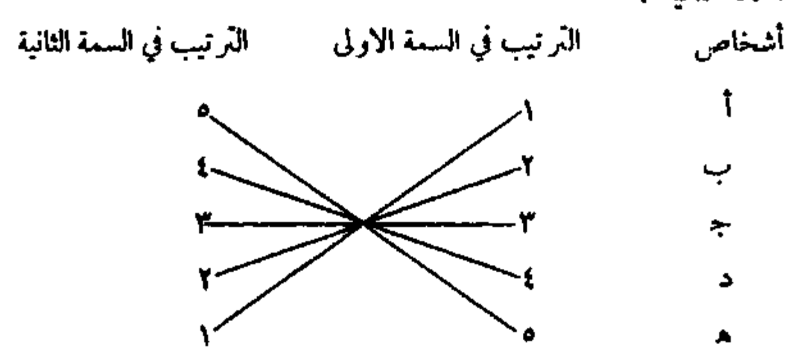
في كثير من الأحيان لا يستطيع الباحث أن يحدد قيم المتغير أثناء تغيره بل يكون من الأيسر له أن يعبر عن مراحل تغيره برتب نسبية ، كأن يحدد أيها الأول وأيها الثاني ، وأيها الأخير . ولنفرض أن هدف الباحث ايجاد معامل الارتباط بين سمتين من سمات الشخصية وشمل هذا البحث تقدير خمسة أشخاص بالنسبة لهاتين السمتين فانه يستطيع بمقدار ما بين ترتيب هؤلاء الأشخاص الخمسة في السمتين من تشابه أو اختلاف تقدير مدى الارتباط بين هاتين السمتين ، ولنفرض أيضا أن الباحث قد حصل على احدى النتائج الآتية في بحثه .

الحالة الأولى :

أشخاص	الترتيب في السمة الأولى	الترتيب في السمة الثانيـة
أ	٤	٤
ب	٢	٢
جـ	٥	٥
د	١	١
هـ	٣	٣

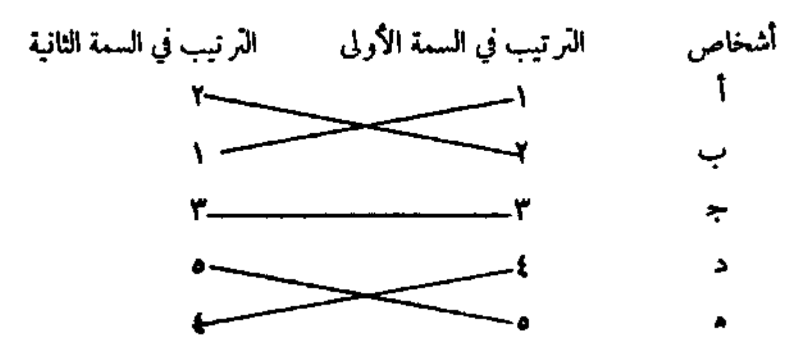
وفي هذه الحالة نلاحظ تطابقا تاما بين رتب الأشخاص في السمتين ، ومن هذا يمكن ـاحث دون القيام بأية عملية حسابية استنتاج أن معامل الارتباط بين السمتين + ١

الحالة الثانية :



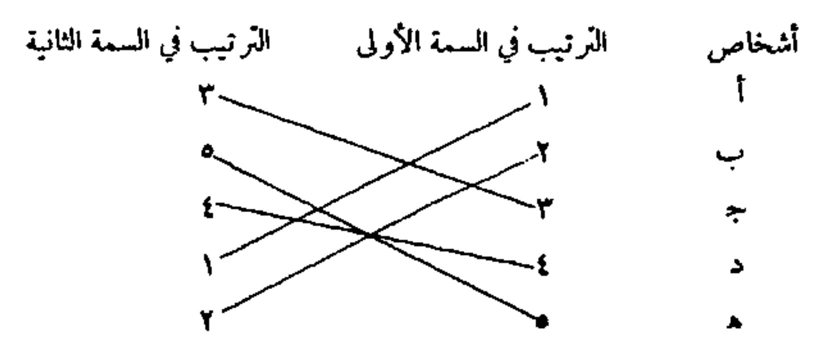
وهنا نلاحظ أن الرتب في المتغيرين مختلفة اختلافا تاما ، وقد وصل الاختلاف بينهما الى حد التضاد ، فالأول في أحدهما هو الأخير في الثاني وهكذا ... ولذا معامل الارتباط في هذه الحالة يكون ١

الحالة الثالثة :



نلاحظ هنا أن هناك اتفاقا جزئيا بين الترتيب في السمتين ، ولذلك فان معامل الارتباط يكون + كسر .

الحالة الرابعة :



في هذه الحالة نلاحظ تضادا جزئيا بين الترتيب في السمتين ولذلك فان معامل الارتباط = — كسر .

ـ وطريقة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان تقوم على نفس هذا الأساس فكلما كان الفرق بين رتب القيم المتقابلة في المتغيرين كبيراً قلت درجة الارتباط بين المتغيرين ، والعكس بالعكس . لهذا كانت الخطوة الأولى ب ـسريبه تشتمل على ايجاد الفروق بين رتب القيم المتقابلة . فاذا فرضنا وجود ثلاث قيم متقابلة لكل من المتغيرين وأوجدنا رتبها كما هو الحال في المثال الآتي :

	المتغير (س)	المتغير (ص)	الفرق بين الرتب
حالة (أ)	٣	١	+ ٢
حالة (ب)	٢	٢	— ٢
حالة (ج)	١	٣	— ١

فان الفروق بين الرتب تكون موجبة الاشارة أو سالبتها بحيث أن مجموع الفروق الموجبة يعادل مجموع الفروق السالبة كما في المثال (+ ٢ ، — ٢) ، ولايجاد معامل الارتباط بين رتب المتغيرين علينا أن نعتبر هذه الفروق مجتمعة ، الا أن الجمع الجبري في هذه الحالة يكون عديم القيمة حيث أن حاصل الجمع يكون دائما صفرا ، ولهذا تشتمل الطريقة على خطوة أخرى وهي تربيع هذه الفروق حتى نتخلص من الاشارات بجعلها جميعا موجبة .

مثال : اختبر ١٠ أطفال في مادتي اللغة العربية والحساب وكانت درجاتهم في المادتين كـــالآتي :

الاسم	درجة اللغة العربيـــة	درجـــة الحساب
محمد	٢٢	٤٥
حسن	١٥	٢٠
أحمد	٤٧	٤٠
ابراهيم	٣٣	٣٧
خالد	٢٤	٣٠
فائـــق	٤٢	٣٢
حلمي	٢٥	٣٤
خليل	٢٠	٢٥
قاسم	٣٦	٣٥
عـــلي	٤٤	٤١

جدول (٥٦) درجات ١٠ أطفال في مادتين

والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب بين مادتي اللغة العربية والحساب . لايجاد هذا المعامل نتبع الخطوات الآتية :

الاسم	درجة اللغة العربية	درجة الحساب	رتبة اللغة العربية	رتبة الحساب	الفرق	الفرق مربع
محمد	٣٢	٤٥	٦	١	٥	٢٥
حسن	١٥	٢٠	١٠	١٠	—	—
أحمد	٤٧	٤٠	١	٣	-٢	٤
ابراهيم	٣٣	٣٧	٥	٤	١	١
خالد	٢٤	٣٠	٨	٨	—	—
فائق	٤٢	٣٢	٣	٧	-٤	١٦
حلمي	٢٥	٣٤	٧	٦	١	١
خليل	٢٠	٢٥	٩	٩	—	—
قاسم	٣٦	٣٥	٤	٥	-١	١
علي	٤٤	٤١	٢	٢	—	—
المجموع					٧ -٧ ٠٠٠	٤٨

جدول (٥٧) حساب معامل ارتباط الرتب

وتكون الخطوة الثالثة بعد حساب مجموع مربعات الفروق تطبيق القانون الذي توصل اليه سبيرمان Spearman لحساب معامل الارتباط وهو :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

على اعتبار أن ر = معامل ارتباط الرتب .

، مج $ف^{٢}$ = مجموع مربعات الفروق (ف الفرق بين رتبتي الحالة الواحدة)
ن = عدد الحالات .

فهو في هذا المثال − ١ − $\frac{٦ \times ٤٨}{١٠ \times ٩٩}$ = ٠,٧١

ومن الطبيعي أن مثل هذا القانون يجعل معامل الارتباط عندما تنطبق الرتب (+ ١) ، وذلك لأن الفروق في هذه الحالة تكون معدومة فتكون قيمة الكسر $\frac{٦ \text{ مج } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$ مساوية صفرا ويكون معامل الارتباط = ١ − صفر = ١ .

وعلى العكس من ذلك في حالة تعاكس الرتب فان هذا القانون يجعل معامل الارتباط − ١ كما هو في الحالة الآتية : −

رتب المتغير (س)	رتب المتغير (ص)	الفروق −	مربعات الفروق
١	٥	− ٤	١٦
٢	٤	− ٢	٤
٣	٣	—	—
٤	٢	٢	٤
٥	١	٤	١٦
المجموع		٦ − ٦ ٠٠٠	٤٠

جدول (٥٨) حالة تعاكس الرتب

ر = − $\frac{٦ \times ٤٠}{٥ \times ٢٤}$ = ١ − ٢ = − ١

ومن المعتاد أن يجد الباحث حالات كثيرة تتكرر فيها الرتب في المتغير الواحد . كأن توجد قيمتان تأخذان الرتبة ٣ ، وفي هذه الحالة يكون المتبع أن يعطي كل منهما ترتيبا متوسطا بين الترتيبين ٣ ، ٤ أي أن ترتيب كل منهما يصبح ٣,٥ ويكون ترتيب القيمة التالية لذلك هــو ٥ ، واذا اشتركت ثلاث حالات في الترتيب ٥ أعطــي كل منهم ترتيب متوسط ٥ ، ٦ ، ٧ أي $\frac{٥ + ٦ + ٧}{٣}$ = ٦ وهكذا ، وتأخذ القيمة التالية لذلك الترتيب ٨ .

واليك مثالا يشتمل على القيم ذات الترتيب المتكرر :

فيما يلي أطوال عشرين شخصا وأوزانهم ، والمطلوب ايجاد معامل ارتباط الرتب بين الطول والوزن لهذه الحالات :

اسم الشخص	الطول بالسم	الوزن بالكجم	رتب الطول	رتب الوزن	الفرق بين الرتب	مربع الفرق
أ	١٦٧	٦٨	١٦,٥	١٥,٥	١	١
ب	١٧٥	٦٥	٩,٥	١٩	— ٩,٥	٩٠,٢٥
حـ	١٦٥	٦٢	٢٠	٢٠	—	—
د	١٦٧	٧٧	١٦,٥	١٢,٥	٤	١٦
هـ	١٦٦	٧٧	١٨,٥	١٢,٥	٦	٣٦
و	١٧٢	٨٥	١٢	٥	٧	٤٩
ز	١٩٠	٨١	٢,٥	٧.٥	٥	٢٥
ح	١٦٩	٧٢	١٥	١٤	١	١
ط	١٧٢	٦٨	١٢	١٥,٥	— ٣,٥	١٢,٢٥
ى	١٨١	٩٠	٧,٥	٢,٥	٥	٢٥
ك	١٨٧	٨١	٤	٧,٥	٣,٥	١٢,٢٥
ل	١٧٥	٦٧	٩,٥	١٧,٥	— ٨,٠	٦٤
م	١٧٢	٨٠	١٢	١٠	٢	٤
ن	١٦٦	٦٧	١٨,٥	١٧,٥	١	١
ص	١٧٠	٨٠	١٤	١٠	٤	١٦
ع	١٩٢	٨٥	١	٥	٤	١٦
ف	١٨٥	٩١	٥,٥	١	٤,٥	٢٠,٢٥
س	١٨١	٩٠	٧,٥	٢,٥	٥	٢٥
ق	١٨٥	٨٥	٥,٥	٥	٠,٥	٠,٢٥
ت	١٩٠	٨٠	٢,٥	١٠	— ٧,٥	٥٦,٢٥
المجموع			٢١٠	٢١٠	٤١ — ٤١ ٠٠٠	٤٧٠,٥٠

جدول (٥٩) حالة تكرر الرتب

$$\text{معامل ارتباط الرتب} = ١ - \frac{٦ \times ٤٧٠,٥}{٢٠ \times ٣٩٩} = ٠,٦٥$$

وللتأكد من صحة وضع الرتب المقابلة للقيم المختلفة يمكن جمع الرتب في المتغيرين . والوسيلة المباشرة للتأكد من ذلك أن يكون مجموع الرتب واحد لكل من المتغيرين ، وزيادة على ذلك فان مجموع الرتب في كل من المتغيرين ينبغي أن يكون معادلا $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ على اعتبار أن ن = عدد القيم أو الحالات . وهو في حالة المثال الحالي = ٢٠ فيكون مجموع الرتب $\frac{٢٠ \times ٢١}{٢} = ٢١٠$

معـــامل ارتبـــاط بيرسون :

ويطلق على هذه المعامل « Product Moment » ، على اعتبار أن لفظ « Moment » يفيد انحراف القيم عن المتوسط مرفوعا لاية قوة ، وتقوم التسمية على أساس أن المقدار الهام في هذه الطريقة هو حاصل ضرب انحراف كل من القيمتين المتقابلتين في المتغيرين عـــن متوسطهمـــا .

ومعامل ارتباط بيرسون يسد نقصا هاما في معامل ارتباط الرتب ، وهو أن المعامل الأخير يتناول في حسابه الرتب لا القيم نفسها ، وحساب الارتباط على أساس الرتب أقل دقة من حسابه على أساس القيم ، فزيادة القيمة أو نقصها لا يغير من قيمة المعامل على أساس الرتب ما دامت هذه الزيادة أو النقص لا تغير وضع القيمة بالنسبة للمجموعة . بينما يتأثر معامل ارتباط بيرسون بأي تغير في القيم . فاذا كان لدينا خمس قيم متقابلة مثلا لكل من متغيرين كما يأتي :

	المتغير (س)	المتغير (ص)	ح س	ح ص	ح س ح ص
أ	٥	٧	— ٢	— ١	٢
ب	٧	٧	—	— ١	—
جـ	٦	٨	— ١	—	—
د	٨	٩	١	+ ١	+ ١
هـ	٩	٩	٢	+ ١	+ ٢

جدول (٦٠) الأساس الذي تقوم عليه طريقة بيرسون

فاذا كانت ح س = انحراف القيمة عن متوسط قيم (س) و حص = انحراف القيمة عن متوسط قيم (ص) فان ح س ح ص وهو حاصل ضرب انحراف كل قيمة عن متوسط قيم المتغير في انحراف القيمة التابعة لها عن متوسط قيم المتغير الآخر يصلح مقياسا لمدى ما بين المتغيرين من ارتباط . فكلما زاد مجموع حواصل الضرب كلما زادت العلاقة بين المتغيرين اطرادا . أما اذا كان مجموع حواصل الضرب سالب القيمة فان هذا يدل على انحراف القيم المتقابلة في المتغيرين عن المتوسط يسير في اتجاه عكسي على وجه العموم أي اذا زادت القيمة عن المتوسط تبع ذلك نقص القيمة المقابلة لها عن متوسط قيم المتغير الآخر . وهذا دليل كاف على أن معامل الارتباط يكون سالبا .

وتقوم طريقة بيرسون على هذا الأساس بوجه عام الا أن الطريقة تتخذ صورا متعددة نذكر منها ما يأتي :

معامل ارتباط بيرسون باستعمال الانحرافات :

لتوضيح الخطوط المتبعة في ايجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة نضرب المثال الآتي :

قيم (س)	قيم(ص)	ح س	ح ص	ح س ح ص	$ح^{٢}_{س}$	$ح^{٢}_{ص}$
٢٥	٢٢	-١١	١٣	١٤٣	١٢١	١٦٩
٤٢	٢٧	٦	٢	١٢	٣٦	٤
٣٥	٤٥	-١	١٠	-١٠	١	١٠٠
٣٧	٣٥	١	—	—	١	—
١٥	٣٣	-٢١	-٢	٤٢	١٤١	٤
٢٤	٢٠	-١٢	٥	٦٠	١٤٤	٢٥
٤٣	٣٢	٧	-٣	-٢١	٤٩	٩
٥٣	٤٤	١٧	٩	١٥٣	٢٨٩	٨١
٤٧	٤٥	١١	١٠	١١٠	١٢١	١٠٠
٣٩	٢٧	٣	-٨	-٢٤	٩	٦٤
٣٦٠	٣٥٠	٤٥ -٤٥ ٠٠	٣١ -٣١ ٠٠	٥٢٠ -٥٥ ٤٦٥	١٢١٢	٥٥٦

جدول (٦١) معامل ارتباط بيرسون بطريقة الانحراف

يتكون هذا الجدول من سبعة أعمدة ، يشتمل الأول والثاني منها على قيم المتغيرين المراد ايجاد معامل الارتباط بينهما كالطول والوزن مثلا ، أو كمادتين دراسيتين مختلفتين ، أو صفتين نفسيتين كالقدرة الرياضية والقدرة اللفظية ، أوأشخاص في مقياسين للاتجاهات العقلية ... الخ ، ويشتمل العامود (٣) على انحراف قيم المتغير (س) عن متوسط قيم هذاالمتغير وهو ٣٦ $(\frac{٣٦٠}{١٠})$. ويشتمل العامود (٤) على انحراف قيم المتغير (ص) عن متوسط قيم المتغير (ص) وهو $(\frac{٣٥٠}{١٠})$. والعامود الخامس يحتوي على حواصل ضرب ح س ح س أي انحراف قيم س عن متوسطها × انحراف قيم (ص) المقابلة لها عن متوسطها . والعامود السادس والسابع يشتملان على مربعات انحرافات قيم كل من س ، ص .

بعد حساب ناتج كل من مجـ $ح_س ح_ص$ ، مجـ $ح^٢_س$ ، مجـ $ح^٢_ص$ لا يتطلب حساب معامل الارتباط أكثر من التعويض في القانون .

$$ر = \frac{مجـ\ ح_س\ ح_ص}{\sqrt{مجـ\ (ح^٢_س)\ مجـ\ (ح^٢_ص)}}$$

أي أن معامل الارتباط في هذا المثال

$$= \frac{٤٦٥}{\sqrt{١٢١٢ - ٥٥٦}} \times ٠,٥٧$$

ويمكن وضع معامل الارتباط في وضع معروف وهو كالآتي :

$$ر = \frac{مجـ\ ح_س\ ح_ص}{ن\ ع_س\ ع_ص}$$

حيث $ع_س$ هو الانحراف المعياري للمتغير (س) و $ع_ص$ هو الانحراف المعياري للمتغير (ص) . ولعله من الواضح أن هذه الصورة هي نفس الصورة السابقة لأن $ع_س$ =

$$\sqrt{\frac{مجـ\ ح^٢_س}{ن}} \quad ، \quad ع_ص = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^٢_ص}{ن}}$$

ويمكن تلخيص خطوات العمل في هذه الطريقة فيما يلي :

١ – اجمع قيم كل من المتغيرين .

٢ – احسب المتوسط الحسابي لقيم كل متغير .

٣ – احسب انحراف كل قيمة عن متوسط قيم المتغير التـابعة له أي حس ، حص (عامودي ٣ ، ٤) .

٤ – اضرب كل من حس × حص المقابـل له (عامود ٥) لتحصل على مجـ حس حص (وهو حاصل جمع قيم عامود ٥) .

٥ – ربع كل من حس ، حص (عامودي ٦ ، ٧) لتحصـل على مجـ ح^{٢}س ، مجـ ح^{٢}ص .

٦ – طبق القانون لتحصل على معامل الارتباط .

ويلاحظ أن مجـ حس حص هو الذي يحدد اشارة معامل الارتباط ، فان كـان المجموع الجبري لحواصل ضرب الانحرافات موجبا كان معامل الارتباط موجبا ، وان كان سالبا كان المعامل سالبا .

وهذه الطريقة توفر على الباحث استخدام الأعداد الأصلية الكبيرة في حساب معامل الارتباط ، الا أن سهولتها تتوفر فقط حينما يكون المتوسطان الحسابيان لقيم المتغيرين صحيحة ، أما اذا كان المتوسطان عددين كسريين تعقد حساب قيم الأعمـدة (حس حص) ، (ح^{٢}س) ، (ح^{٢}ص) تعقدا قـد يزيد على الصعوبة التي يكسبها الباحث من استخدام القيم الأصلية . تلك هي نفس الصعوبة التي يصادفها الباحث في حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري من القيم الأصلية التي نلجأ من أجلها الى الطريقة المختصرة باتخاذ وسط فرضي وحساب الانحرافات الفرضية . ويمكن تطبيق نفس هذه الطريقة في حالة معامل الارتباط أيضا . واليك طريقة الاستفادة من الوسط الفرضي في حساب معامل الارتباط في جدول (٧٤) .

فالجدول الآتي يتخذ أساسا في حسابه الانحرافات عن المتوسطين الفرضين الآتيتين : ٣٠ للمتغير (س) ، ٤٠ للمتغير (ص) .

قيم (س)	قيم (ص)	حَ س	حَ ص	حَ س حَ ص	حَ²س	حَ²ص
٢٥	٢٢	-٥	-١٨	٩٠	٢٥	٣٢٤
٤٢	٣٧	١٢	-٣	-٣٦	١٤٤	٩
٣٥	٤٥	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
٣٧	٣٥	٧	-٥	-٣٥	٤٩	٢٥
١٥	٣٣	-١٥	-٧	١٠٥	٢٢٥	٤٩
٢٤	٣٠	-٦	-١٠	٦٠	٣٦	١٠٠
٤٣	٢٢	١٣	-٨	-١٠٤	١٦٩	٦٤
٥٣	٤٤	٢٣	٤	٩٢	٥٢٩	١٦
٤٧	٤٥	١٧	٥	٨٥	٢٨٩	٢٥
٣٩	٢٧	٩	-١٣	-١١٧	٨١	١٦٩
+٣٦٠	٣٥٠	٨٦٦ -٢٦ ٦٠	١٤ -٦٤ -٥٠	٤٥٧ -٢٩٢ ١٦٥	١٥٧٢	٨٠٦

جدول (٦٢) حساب معامل ارتباط باتخاذ وسط فرضي

ويحسب معامل الارتباط بالقانون الآتي :

$$ر = \frac{\text{مجـ}\,\bar{ح}_{س}\,\bar{ح}_{ص} - \dfrac{\text{مجـ}\,\bar{ح}_{س}\ \text{مجـ}\,\bar{ح}_{ص}}{ن}}{\sqrt{\left[\text{مجـ}\,\bar{ح}^{2}_{س} - \dfrac{(\text{مجـ}\,\bar{ح}_{س})^{2}}{ن}\right]\left[\text{مجـ}\,\bar{ح}^{2}_{ص} - \dfrac{(\text{مجـ}\,\bar{ح}_{ص})^{2}}{ن}\right]}}$$

وهو يساوي في هذا المثال :

$$\frac{١٦٥ - \frac{٦٠ \times (-٥٠)}{١٠}}{\sqrt{\left[١٥٧٢ - \frac{(٥٠)^{٢}}{١٠}\right]\left[٨٠٦ - \frac{(-٥٠)^{٢}}{١٠}\right]}} = ٠,٥٧$$

حساب معامل الارتباط من القيم الخام (Raw Values)

ويمكن أن نعدل الطريقة السابقة بحيث يتسنى حساب معامل الارتباط من القيم الخام مباشرة ، ولكن في هذه الحالة يحتاج الباحث الى اجراء تعديل في القانون الذي يحسب به معامل الارتباط كما يتضح من حل نفس المثال السابق بهذه الطريقة :

(١) قيم (س)	(٢) قيم (ص)	(٣) س × ص	(٤) س٢	(٥) ص٢
٢٥	٢٢	٥٥٠	٦٢٥	٤٨٤
٤٢	٢٧	١٥٥٤	١٧٦٤	١٣٦٩
٣٥	٤٥	١٥٧٥	١٢٢٥	٢٠٢٥
٢٧	٣٥	١٢٩٥	١٣٦٩	١٢٢٥
١٥	٣٣	٤٩٥	٢٢٥	١٠٨٩
٢٤	٣٠	٧٢٠	٥٧٦	٩٠٠
٤٣	٣٢	١٣٧٦	١٨٤٩	١٠٢٤
٥٣	٤٤	٢٣٣٢	٢٨٠٩	١٩٣٦
٤٧	٤٥	٢١١٥	٢٢٠٩	٢٠٢٥
٢٩	٢٧	١٠٥٣	١٥٢١	٧٢٩
٣٦٠	٣٥٠	١٣٠٦٥	١٤١٧٢	١٢٨٠٦

جدول (٦٣) معامل الارتباط من القيم الخام

فالخطوات التي أجريت في هذا الجدول كان أساسها القيم الخام مباشرة ، ولم تبدأ بتحويل القيم الى انحرافاتها عن المتوسط . فالعامود الثالث يشتمل على حواصل ضرب قيم (س) والمقابلة لها في المتغير (ص) ، والرابع والخامس يشتمل على مربعات القيم .

ويكون معامل الارتباط في هذه الحالة كما هو في القانون الآتي :

$$ر = \frac{مج (س ص) - \frac{مج س . مج ص}{ن}}{\sqrt{[مج س^٢ - \frac{(مج س)^٢}{ن}] \quad [مج ص^٢ - \frac{(مج ص)^٢}{ن}]}}$$

وبالتعويض من الجدول في المعادلة يكون حساب معامل الاتباط في هذا المثال كما يلي :

$$ر = \frac{١٣٠٦٥ - \frac{٣٦٠ \times ٣٥٠}{١٠}}{\sqrt{[١٤١٧٢ - \frac{(٣٦٠)^٢}{١٠}] \quad [١٢٨٠٦ - \frac{(٣٥٠)^٢}{١٠}]}}$$

$$= ٠,٥٧$$

معامل الارتباط من جدول الانتشار :

ذكرنا أن القيم المتقابلة لمتغيرين يمكن تفريغها في جدول مزدوج بحيث تمثل كل علامة من العلامات التي توضع في هذا الجدول فردا له قيمتين قيمة بالنسبة للمتغير (س) وقيمة أخرى بالنسبة للمتغير (ص) . وبهذا نحدد تكرار كل خلية من خلايا الجدول المزدوج . ولتوضيح ذلك نضرب المثال الآتي :

طبق اختباران للذاكرة على خمسين شخصا فكانت درجاتهم في الاختبارين كالآتي :

اختبار أ	اختبار ب	اختبار أ	اختبار ب	اختبار أ	اختبار ب	اختبار أ	اختبار ب
٢٥	١٣	٢٩	١٦	٣٠	١٣	٢٩	١٠
١٩	١١	٢٧	١٢	٢٢	٩	٢٠	٩
٢٢	٧	٣١	١٤	١٥	٦	٢٥	١٧
٤٣	١٥	٤٥	١٦	١٦	٤	٣٣	١١
٢٧	١٢	٣١	٨	٢٧	١٥	٢٤	٩
٢٢	١٨	١٧	١٠	٣٣	١١	٣٧	١٤
٣٠	١٦	٢٨	٧	٢٥	١٠	١٧	١٠
٣٥	١٩	٣٦	١١	٣٨	١٥	١٢	٨
٢١	٩	٢٤	١٢	٢٤	٢٢	٢٢	١٣
٤٠	١٥	١١	١٠	٤٤	١٥	٤١	١٦
٣٢	١٤	١٧	٥	٣٣	١٧	٤٥	٢٠
٢٧	١٠	٢٨	١٤	١٢	١١	٤٥	٢٠
١٨	١١	٢٩	١٢				

جدول (٦٤) درجات خمسين شخصاً في اختبارين للذاكرة

ونلاحظ أن درجات اختبار(أ)تنحصر بين ١١ ، ٤٥ وأن درجات اختبار(ب)تنحصر بين ٤ ، ٢٠ ويمكن تمثيل العلاقة بين درجات الاختبارين بجدول الانتشار الآتي :

اختبار أ / اختبار ب	٧ —	١٤ —	٢١ —	٢٨ —	٣٥ —	٤٢ —	المجموع
٣ —		(٢) //					٢
٦ —	(١) /	(١) /	(١) /	(٢) //			٥
٩ —	(٢) //	(٥) ////	(٥) ////	(٣) ///	(١) /		١٦
١٢ —			(٥) ////	(٥) ////	(٢) //		١٢
١٥ —			(٢) //	(٣) ///	(٣) ///	(٣) ///	١١
١٨ —			(١) /		(١) /	(٢) //	٤
المجموع	٣	٨	١٤	١٣	٧	٥	٥٠

جدول (٦٥) جدول الانتشار لدرجات اختبارين للذاكرة

وقد ذكرنا أن تجمع التكرارات وهيئة هذا التجمع تدل دلالة تقريبية عن نوع الارتباط ومداه ، ولكننا هنا نوضح كيف يمكن حساب معامل الارتباط عن طريق جدول الانتشار ، واليك الخطوات المتبعة لحساب المعامل في جدول (٦٥) :

[illegible]	٧-	١٤-	[illegible]	٢٨-	٣٥-	٤٢-	مجـ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
٣-		٢ ٤					٢	٢-	٤-	٨	٤	
				٢ ٢-			٥	١-	٥-	٥	٢	٤
١٢-				٥ ٥	٤ ٢		١٢	١	١٢	١٢	٩	
١٥-				٢ ٣ ٦	٣ ٣ ١٨	٣ ٤ ١٨	١١	٩	٢٢	٤٤	٢٦	
١٨-					١ ٦ ٦	٢ ٢ ١٢	٤	٣	١٢	٣٦	٢٢	
مجـ	٣	٨	١٤	١٣	٧	٥	٥٠		٤٦ / ٩-	١٠٥	٧٤	٢
[illegible]	٢-	١-		١	٢	٣			٣٧		٧٢	
[illegible]	٦-	٨-		١٣	١٤	١٥	٢٨ = ١٤ - ٤٢					
[illegible]	١٢	٨		١٣	٢٨	٤٥	١٠٦					
[illegible]	٣	٥		١١	٢٢	٣٤	٧٢					
	-	-		٢	-	-	٢					

جدول (٦٦) حساب معامل الارتباط من جدول الانتشار

من الجدول يتضح أن :

$\text{مجـ ح}_{\text{س}} = ٢٨$

$\text{مجـ ح}_{\text{ص}} = ٣٧$

، $\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{س}} = ١٠٦$

، $\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{ص}} = ١٠٥$

، $\text{مجـ ح}_{\text{س}}\text{ح}_{\text{ص}} = ٧٤$

وباستخدام المعادلة يظهر أن :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ح}_{\text{س}}\,\text{ح}_{\text{ص}} - \frac{\text{مجـ ح}_{\text{س}}\,\text{ح}_{\text{ص}}}{\text{ن}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{س}} - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}\right]\left[\text{(مجـ ح}^{٢}_{\text{ص}} - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{ص}})^{٢}}{\text{ن}}\right]}}$$

$$= \frac{٧٤ - \frac{٢٨ \times ٣٣}{٥٠}}{\sqrt{\left[١٠٦ - \frac{(٢٨)^{٢}}{٥٠}\right]\left[١٠٥ - \frac{(٣٧)^{٢}}{٥}\right]}}$$

$$= \frac{٥٢,٢٨}{\sqrt{[٩٠,٣٢][٧٧,٦٢]}}$$

$$= ٠,٦٤$$

و تنحصر خطوات العمل فيما يأتي :

١ — فرغ القيم المعطاة في جدول انتشار أي حدد تكرار كل خلية من خلايا الجدول المزدوج .

٢ — اتخذ صفرا فرضيا لكل من قيم (س) ، (ص) وانحرافا فرضيا مدرجا للفئات الأقل والأكثر من الفئة الصفرية كما هو متبع في الطريقة المختصرة لحساب كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري .

٣ — احسب مجـ $\bar{ح}_{س}$ و مجـ $\bar{ح}_{ص}$ بضرب الانحراف الفرضي لكل فئة في تكرارها ثم اجمع حواصل الضرب الناتج .

(مجـ $ح_{س}$ = ٤٦ — ٩ = ٣٧ ، مجـ $\bar{ح}_{ص}$ = ٤٢ — ١٤ = ٢٨) في الجدول .

٤ — احسب مجـ $\bar{ح}^{2}_{ص}$ ، $\bar{ح}_{س}$ بضرب كل من حواصل الضرب السابقة في $\bar{ح}$ في العامود السابق لنحصل على ح — ٢ لكل فئة ثم اجمع النواتج .

(مجـ $\bar{ح}^{2}_{س}$ = ١٠٥ ، مجـ $\bar{ح}^{2}_{ص}$ = ١٠٦ في الجدول) .

٥ — لحساب $\bar{ح}_{س}$ $\bar{ح}_{ص}$ ينبغي حساب ذلك لكل خلية من خلايـــا الجدول الأول ، ويكون ذلك بضرب الانحراف الفرضي لصف الخلية × الانحراف الفرضي للعامود ، وترى حواصل الضرب في الجدول في الركن العلوي الأيمن من كل خلية ، ثم اضرب حاصل ضرب الانحرافين في تكرار الخلية ، وتجد حاصل الضرب الأخير في الجدول في الركن الأسفل الأيسر لكل خلية .

٦ — لحساب مجـ $\acute{ح}_{س}\acute{ح}_{ص}$ تجمع حواصل الضرب السابقة (الموضوعة في الركن الأسفل الأيمن) ويحسن تقسيم العامود الأخير أو الصف الأخير الى قسمين : قسم لجمع النواتج الموجبة وآخر لجمع النواتج السالبة .

فمثلا في حالة الفئة (٦ —) في اختبـــار ب نجد أن تكرارها ٥ وانحرافهـــا الفرضي — ١ فيكون مجـ $\acute{ح}_{س}$ لها ٥ × — ١ = — ٥ ويكون مجـ $ح^{2}_{س}$ = حاصل الضرب السابق في الانحراف الفرضي مرة ثانية أي = — ٥ × — ١ = ٥ .

ولحساب مجـ $\acute{ح}_{س}\acute{ح}_{ص}$ لها نلاحظ أن الخلية الأولى في هذا الصف تكرارها ١ .

فلحساب $ح_{س}ح_{ص}$ لها ترى أن الانحراف الفرضي للصف التابعة له هو — ١ .

والانحراف الفرضي للعامود التابعـة له هو – ٢ فيكون مجـ حَس حَص لهذه الخلية ١ – × – ٢ = ٢ وهو العدد الموجود في الركن الأيمن العلوي لهذه الخلية ، ثم يضرب ٢ في تكرار هذه الخليـة وهو ١ ينتج مجـ حَس حَص وهو ٢ الموضوع في الركن الأيسر السفلي .

ننتقل بعد ذلك الى الخلية الثانية فنجد أن الانحراف الفرضي للصف – ١ والانحراف الفرضي للعامود – ١ فيكون حَس حَص للخلية وهو = ١ ثم يضرب الناتج في تكرار الخلية وهو ١ ينتج مجـ حَس حَص للخلية وهو ١ .

أما الخلية الثالثة فنظرا لأن الانحراف الفرضي صفر للعامود التابعة له فهي لا تحتاج لحساب لأن الناتج النهائي صفر .

وفي حالة الخلية الرابعة نجد الانحراف الفرضي للصف ١ والانحراف الفرضي للعامود – ١ ولذلك فان حَس حَص لها = ١ وهو الموضوع في الركن الأيمن العلوي ، ثم يضرب – ١ في تكرار الخلية وهو ٢ ينتج مجـ حَس حَص لها وهو – ٢ .

بعد ذلك نوجد المجموع الجبري للصف كله تحت خانة حَس حَص فنجد أن مجموع النواتج الموجبة ٢ + ١ = ٣ وهي الموضوعة في خانة القيم الموجبة ثم مجموع النواتج السالبة لا نجد الا – ٢ وقد وضعت في خلية القيم السالبة في العامود الأخير .

هذا ويلاحظ أن مجـ حَس حَص لا بد أن يكون لها ناتج واحد سواء نظرنـا الى الصفوف أم الى الأعمدة : وهو هنا ٧٤ .

٧ – بعد حساب كل من (مجـ حَس ، مجـ حَص) ، (مجـ حَس^٢ ، مجـ حَص^٢) (مجـ حَس حَص) احسب معامل الارتباط من القانون .

متى نستخدم معامل ارتباط بيرسون ؟

يعتبر معامل ارتباط بيرسون أكثر المعاملات شيوعا وأدقها جميعا ، فهو يتأثر بجميع القيم المعطاة ، كما أن له مقاييس دقيقة لحساب مدى ثباته ، كما أنه يدخل ضمن عمليات ومعاملات احصائية أخرى ، الا أنه يجب مراعاة أساسين هامين عند استخدامه .

١ – ينبغي أن يكون التوزيع العام للمتغيرين اعتداليا ، ومن الطبيعي أن ينحرف التوزيع في كل منهما قليلا عن الاعتدالي نتيجة لصغر العينة أو للعوامل التي تؤثر عادة على

نتائج البحوث ، الا أن انحراف التوزيع عن الاعتدالي ينبغي ألا يكون ذا دلالة احصائية على وجه العموم .

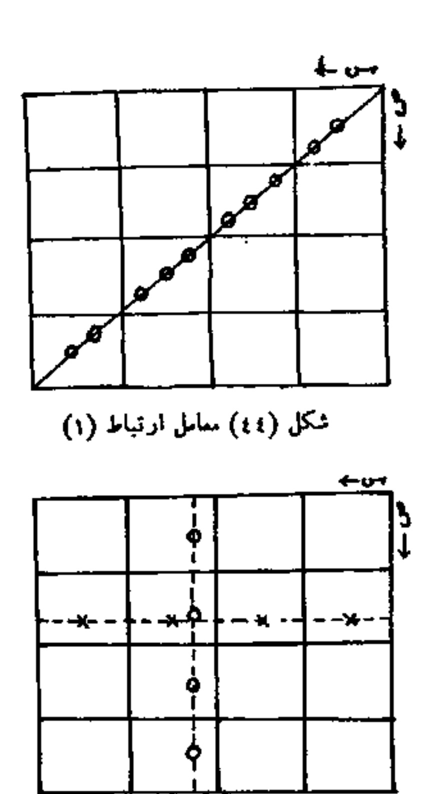
٢ — ينبغي أن تكون العلاقة بين المتغيرين مستقيمة ، ويقصد بذلك أنه اذا حسبت المتوسطات الحسابية للأعمدة أو للصفوف فانها تميل لأن تقع على خطين مستقيمين أحدهما يربط بين متوسطات الصفوف والآخر بين متوسطات الأعمدة — أما اذا كان الخط الذي يربط بين متوسط يميل لأن يكون منحنيا فان الذي يستخدم في هذه الحالة هو معامل آخر يطلق عليه نسبة الارتباط « Correlation Ratio » التي سنشرحها فيما بعد .

(أ) / (ب)	٧ —	١٤ —	٢١ —	٢٨ —	٣٥ —	٤٢ —
٣ —						
٦ —						
٩ —						
١٢ —						
١٥ —						
١٨ —						

شكل (٤٣) العلاقة المستقيمة

ويطلق على المستقيم الذي يربط بين متوسطات أحد المتغيرين بخط الانحـــــدار « Regression line » فالمستقيم المتصل يربط بين متوسطات درجات اختبار (أ) والمنقط يربط بين متوسطات درجات اختبار (ب) ويلاحظ أن النقط التي تعبر عن المتوسطات لا تنحرف كثيرا عن المستقيمين . مما يدل على أن العلاقة هنا مستقيمة . أما الحالات التي يكون خط الانحدار فيها قوسا فسيأتي توضيحها فيما بعد .

ويلاحظ في شكل (٤٣) أن الزاوية بين المستقيمين صغيرة نوعا . ويمكننا أن نقول أنه كلما صغرت الزاوية بين مستقيمي الانحـــــدار زاد معامل الارتباط بين المتغيرين ، بحيث اذا صغرت لحد انطباق المستقيمين كل على الآخر أصبح معامل الارتباط + ١ وكلما زادت الزاوية بينهما كلما قل معامل الارتباط بين المتغيرين حتى تصل الزاوية الى ٩٠° فيصبح معامل الارتباط صفرا .



شكل (٤٤) معامل ارتباط (١)

شكل (٤٥) معامل ارتباط (صفر)

الانحـــدار والتنبـــؤ :

ذكرنا أن المستقيم الذي يربط بين المتوسطات الحسابية لقيم أحد المتغيرين المقابلة لقيم المتغير الأخرى يطلق عليه خط الانحدار ، وكان أول من استخدم هذا الخط لأول مرة جولتّن Galton في بحثه على وراثة طول القامة .

فقد وجد أن الأطفال الذين يأتون من آباء طوال القامة يميلون لأن يكونوا أقصر قامة من آبائهم ، والذين يأتون من آباء قصار القامة يميلون لأن يكونوا أطول قامة من آبائهم ، أي أن طول الأبناء يميل الى التراجع أو الانحدار نحو المتوسط العام ، وقد أطلق على هذه العلاقة اسم قاعدة الانحدار ، كما أطلق على الخط الذي يوضح هذه العلاقة اسم خط الانحدار .

وفي المثال السابق حاولنا بالنظر رسم مستقيمين يمران بأكبر عدد من نقـــط المتوسطات ويكون أقرب ما يكون من النقط الأخرى . ولكن بيرسون قد أوجد طريقة

رياضية لرسم كل من هذين المستقيمين . ومن الواضح أن مثل مستقيم الانحدار يصلح أساسا للتنبؤ ، فاذا عرفنا قيمة أحد المتغيرين أمكن التنبؤ بالقيمة التي تكون أكثر احتمالا للمتغير الثاني .

ويمثل كل من مستقيمي الانحدار بمعادلة تشتمل على المتغيرين س ، ص ومعامل الارتباط ،فمعـــادلـــة ص على س أي المعادلة التي تتنبأ بقيم ص اذا عرفت قيمة س هي كالآتي :

$$\bar{ح}_{ص} = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \times ح_{س}$$

أي أن انحراف القيمة المقدرة للمتغير ص = معامل الارتباط ×

$$\frac{\text{الانحراف المعياري للمتغير (ص)}}{\text{الانحراف المعياري للمتغير (س)}} \times \text{انحراف القيمة المعروفة للمتغير (س)}$$

ويطلق على $ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$ معامل الانحدار

ونلاحظ في هذه المعادلة أن كل من ر ، $ع_{ص}$ ، $ع_{س}$ تكون معلومة لدينـــا فاذا عرفنا $ح_{س}$ أمكن حساب $ح_{ص}$ المقابلة لها .

ففي المثال السابق بجدول (٧٩) لمعرفة معادلة المستقيم الانحداري لاختبار (ب) على نجد أن الانحراف المعياري لاختبار ب = ٣,٧٢

والانحراف المعياري لاختبار أ = ٩,٤٥

فتكون معادلة المستقيم المطلوب هي

$$\bar{ح}_{ص} = ,٦٤ \times \frac{٣,٧٢}{٩,٤٥} \times ح_{س}$$

$$= ,٢٥ \; ح_{س}$$

---

(١) الخط الموضوع فوق حص معناه ان هذه القيمة تقديرية وهي اقرب ما تكون من القيمة المتوقعة .

ونظرا لأن هذه المعادلة موضوعة في صورة انحرافية أي أن عواملها هي انحرافات عن المتوسط فاننا نحتاج في استخدام هذه المعادلة لمعرفة الحساب للمتغيرين . فهو بالنسبة لاختبار أ = ٢٨,٤٢ ولاختبار ب = ١٢.٧٢ .

فاذا عرفنا مثلا أن أحد الأشخاص كانت درجته في اختبار (أ) ٣٥ نستطيع أن نتنبأ بدرجته في اختبار (ب) على النحو الآتي :

$ح_س$ = ٣٥ − ٢٨,٤٢ = ٦,٥٨

∴ $ح_س$ = ٠,٢٥ × ٦.٥٨ = ١,٦٥

∴درجته في اختبار ب = ١٣,٣٨ + ١,٦٥ = ١٥,٠٣

كما أن $ح_س = \frac{ع_س}{ع_ص} \times ح_ص$

هي معادلة المستقيم الانحداري للمتغير س على ص

فاذا عرفنا قيمة من قيم المتغير ص أمكن تقدير القيمة المقابلة لها في المتغير (س) مع مراعاة أن هذه المعادلة أيضا انحرافية .

فاذا عرفنا أن شخصا أخذ في اختبار (ب) مثلا ١٦ درجة فانه يمكن التنبؤ بدرجته في اختبار (أ) كما يأتي :

$ح_س$ = ١٦ − ١٢,٧٢ = ٣,٢٨

∴ $\bar{ح}_س = \frac{٩,٤٥}{٣,٣٢} \times ٣,٢٨$

= ٨,٣٣

أي أن درجته في اختبار (أ) حسب التقدير = ٨,٣٣ + ٢٧,٠٢ = ٣٥,٣٥

كيفيـــة رسم مستقيم الانحـــدار :

يحتاج رسم مستقيم الانحدار الى معرفة كل من معامل الارتباط بين المتغيرين والمتوسط الحسابي والانحراف المعياري لقيم كل منهما . فعن طريق معامل الارتباط والانحرافين

المعيارين يمكن تكوين معادلتي الانحدار . وقد وجدنا أن معادلة انحدار اختبار ب على اختبار أ في المثال السابق

$$\text{هي ح}^{-}\text{ب} \quad = \frac{\text{ع ب}}{\text{ع أ}} \times \text{ح أ}$$

وبما أن أي مستقيم يتحدد بنقطتين فيمكن تحديد نقطتين في المستقيم الانحداري عن طريقهما برسم المستقيم ولنفرض أن النقطتين هما ح أ = ١٥ ، ح أ = ــ ١٥

∴ ح ـ ب (عند النقطة ح أ = ١٥ أو القيمة ٤٣,٤٢)

$$\text{،٦٤} \times \frac{\text{٣,٧٢}}{\text{٩,٤٥}} \times \text{١٥} = \text{٣,٧٥}$$

فتكون قيمة ب المقابلة للنقطة (ح أ = ١٥)

= ١٢,٧٢ + ٣,٧٥ = ١٦,٤٧ وتكون قيمة ب عند النقطة (ح أ = ــ ١٥ أي القيمة ١٣,٤٢) = ١٢,٧٢ ــ ٣,٧٥ = ٨,٩٧

ومن هاتين النقطتين يمكن رسم مستقيم الانحدار لاختبار ب على أ

	ــ ٧	ــ ١٤	ــ ٢١	ــ ٢٨	ــ ٣٥	ــ ٤٢
٣ ــ						
٦ ــ						
٩ ــ						
١٢ ــ						
١٥ ــ						
١٨ ــ						

جدول (٦٧) خط الانحدار

هذا ويمكن للطالب أن يحاول بنفسه رسم خط الانحدار الآخر الذي يمكن به التنبؤ بدرجات اختبار أ اذا عرفت درجات اختبار ب باختيار نقطتين وتوصيل خط الانحدار بينهما كما اتبع في خط الانحدار الأولى . ويمكن وضع معادلتي خطي الانحدار على صورة

أخرى بالاستعاضة عن الانحراف بالقيم الأصلية مباشرة . فاذا أردنا استخراج قيمة ص بمعرفة قيمة س أمكن تطبيق المعادلة :

$$\text{ص} = \text{ر} \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}} (\text{س} - \text{م}_{\text{س}}) + \text{م}_{\text{ص}}$$

واذا أردنا استخراج قيمة س بمعرفة قيمة ص أمكن تطبيق المعادلة

$$\text{س} = \text{ر} \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}} (\text{ص} - \text{م}_{\text{س}}) + \text{م}_{\text{ص}}$$

حيث $\text{م}_{\text{س}}$ ، $\text{م}_{\text{ص}}$ المتوسطان الحسابيان لكل من المتغيرين (س ، ص) ويلاحظ أن المعادلتين تؤديان الى استنتاج هو أن :

مربع معامل الارتباط = ميل [1] مستقيم انحدار ص على س × ميل مستقيم انحدار س على ص .

من هذا يتضح أن معادلة الانحدار هي معادلة تنبؤية لتوضيح العلاقة بين المتغيرين ، بحيث يمكن عن طريقها التنبؤ بقيمة لا تكون معروفة لدى الباحث ولا يفهم مطلقا أن القيمة المقدرة تقديرا تنبؤيا لا بد وأن تنطبق تماما على القيمة الحقيقية التي تنتج عن البحث الواقعي ، ولكن المقصود هو أنه لو أجرى البحث على حالات كثيرة العدد فان متوسط القيم يكون قريبا جدا من القيمة النظرية الناتجة من المعادلة الانحدارية ، ولهذا فان مستقيم الانحدار كغيره من العلاقات الاحصائية التنبؤية يوفر على الباحث كثيرا من الخطوات العملية التي تستنفذ في تطبيقها جهدا ووقتا — على أن هذا الاقتصاد في الجهد العملي لا يكون على حساب الدقة العلمية ، وخاصة وأن للاحصاء وسائله في التأكد من صلاحية النتائج الحسابية الاحصائية للاستنتاج والتفسير والاعتماد عليها للوصول الى الحقائق العلميـة .

---

(١) ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي تنحصر بينه وبين المحور ، ومعادلة أي مستقيم يمر بنقطة الأصل ص = م س وعلى ذلك فميل مستقيم انحدار ص على س = $\text{ر} \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$ وميل مستقيم انحدار س على ص = $\text{ر} \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$

الترابط الثنائي أو ذو الشعبتين Bi-Serial Correlation :

يستعمل هذا النوع من الترابط في الحالات التي يتعذر فيها تصنيف أحد المتغيرين الى فئات عدية محددة المدى بينما يتيسر ذلك للباحث فيما يتعلق بالتغير الآخر والحالات التي يستخدم فيها الترابط الثنائي هي التي يصنف فيها أحد المتغيرين في مجموعتين . وأمثلة هذه الحالات كثيرة في البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية . فقد يكون البحث متعلقا بمدى العلاقة بين قدر الشخص في ناحية معينة واتصافه أو عدم اتصافه بسمة خاصة من سمات الشخصية . فاذا أردنا مثلا أن نوجد العلاقة بين الذكاء والتوافق الاجتماعي قد نستطيع أن نقيس الذكاء وتصنيف الأفراد تصنيفا دقيقا في فئات محددة بينما قد لا يتسنى لنا ذلك في التوافق الاجتماعي ، فنكتفي بأن نصف الشخص بأنه متوافق اجتماعيا أو غير متوافق اجتماعيا . ومن الأمثلة الأخرى لهذا النوع من الحالات التي يكون فيها أحد المتغيرين تحديدما اذا كان الشخص رياضيا أو غير رياضي ، من الجنس الأبيض أو مـن الزنوج ، كما هو الحال عند ما يهدف البحث الى علاقة ذلك بالاتجاهات العقلية للفرد نحو موضوع معين في البحوث الاجتماعية أو متعلم أو جاهل ، أو ذكر أو أنثى ، أو مقبول أو مرفوض في عمل . أو ناجح أو راسب في امتحان ما ، أو اجابة سؤال بنعم أو لا ، أو اعتناق الشخص لاتجاه معارض أو موافق نحو موضوع معين ... وهكذا . ففي كل هذه المجالات يتعين على الباحث أن يحدد لكل فرد في العينة التي يشملها البحث قيمة محددة أو درجة معينة ، اما لعدم توفر المقاييس الدقيقة التي تعينه على ذلك ، واما لهدف تسهيل البحث فيكتفي بتصنيف المجموعة الى طائفتين متخذا لنفسه أساسا ضمنيا هو المعدل أو المتوسط « Norm » ، فيفصل من يقل عـن هذا المعدل في مجموعة واحدة عن الذين يزيدون عن المعدل في مجموعة أخرى .

مثـال : اذا أراد باحث أن يوجد العلاقة بين نمط الشخصية « Personality Type » للفرد وبين درجاته في اختبار مناسب للذكاء فانه غالبا ما يكون من الصعب أن يضع هذه الأنماط في سلسلة منتظمة متساوية [1] الوحدات بحيث يحدد لكل فرد من أفراد العينة درجة خاصة ، بينما يكون من السهل عليه هذا التقسيم المحدد المفصل فيما يتعلق

---

(١) بالرغم من أن هناك مقاييس كثيرة في الوقت الحاضر لتحديد درجة اتصاف الفرد بميزات نمط خاص من أنماط الشخصية الا أن هذه المقاييس لم تصل بعد لدرجة كافية من الدقة والثبات . ويفضل كثير من الباحثين تصنيف الأشخاص في مجموعتين ، وأكثر هذه الأنماط شيوعاً هي : النوع الانطوائي والانبساطي .

بالذكاء وكثيرا ما يقسم الباحث شخصيات أفراد العينة الى نمطين : انبساطيون وانطوائيون . وواضح أن المتغير الثاني بالرغم من أنه مقسم فقط الى مجموعتين الا أنه متغير متصل Continuous ، أي أن هناك درجات محتملة لا تنقطع لهذا التغيّر ، ويمكننا أن نتصور اتصال هذا التغير اذا افترضنا امكان تحديد أعلى درجة من الانبساط والانطواء في الشخصية وتمثيل هاتين المرحلتين بطرفي مستقيم يمكن أن تمثل شخصية كل فرد منهم بنقطة عليه .

معتـــدل

× ———————————— × ———————————— ×

انطوائي جدا   انبساطي جدا

وعلى ذلك فاستخدام طريقة معامل الارتباط الثنائي ينبغي أن يكون مؤسسا على فرضين أساسيين :

١ — أن يكون كل من المتغيرين متصلا ، ولكن أحدهما قد صنف لسبب ما الى مجموعتين فقط .

٢ — أن كلا منهما موزع في المجموعة الأصلية Population توزيعا اعتداليا .

حساب معامل الارتباط الثنائي :

لنفرض أن الباحث في المثال السابق قد حصل على النتيجة الآتية :

الذكاء / الشخصية	٧٠—	٨٠—	٩٠—	١٠٠—	١١٠—	١٢٠—	١٣٠—	المجموع
انطوائي	١٥	٢٢	٢٧	٢٩	١٥	١٧	٥	١٣٠
انبساطي	١٦	١٥	٣٢	٦	٨	١٠	٣	٩٠
المجموع	٣١	٣٧	٥٩	٣٥	٣٢	٢٧	٨	٢٢٠

جدول (٦٨) العلاقة بين نمط الشخصية والذكاء

فالأساس الذي يقوم عليه معامل الارتباط الثنائي هو المقارنة بين متوسط نسب ذكاء المجموعتين : الانبساطيون والانطوائيون فان كان متوسط المجموعتين واحدا دل ذلك

على انعدام الارتباط بين المتغيرين . وكلما زاد أو قل متوسط الانطوائيين عن متوسط الانبساطيين كلما دل ذلك على علاقة قوية بين الانطواء والذكاء والعكس بالعكس . ولهذا فان العنصر الأساسي في هذا المعامل هو الفرق بين المتوسطين . فاذا رمزنا للمجموعة الأولى وهي مجموعة الانطوائيين بالرمز (أ) والمجموعة الأخرى بالرمز (ب) فان خطوات العمل تنحصر فيما يأتي :

أولا — أوجد متوسط قيم المجموعتين ، أي $م_{أ}$ ، $م_{ب}$

ثانيا — أوجد الانحراف المعياري للمجموعة الكلية ، أي ع .

وقد حسبت في الجدولين الآتيين هذه المقادير الثلاثة .

الفئات (ف)	التكرار (ك)	ح̄	ك ح̄	التكرار (ك)	ح̄	ك ح̄
	المجموعة (أ)			المجموعة (ب)		
٧٠ –	١٥	-٣	٤٥	١٦	-٢	-٣٢
٨٠ –	١٢	-٢	-٤٤	١٥	-١	١٥
٩٠ –	٢٧	—	-٢٧	٣٢	—	—
١٠٠ –	٢٩	-١		٦	١	٦
١١٠ –	١٥	١	١٥	٨	٢	١٦
١٢٠ –	١٧	٢	٣٤	١٠	٣	٣٠
١٣٠ –	٥	٣	١٥	٣	٤	١٢
المجموع	١٣٠		٦٤ -١١٦ -٥٢	٩٠		٦٤ -٤٧ ١٧

جدول (٦٩) متوسط نسب ذكاء المجموعتين

$$م_{أ} = ١٠٥ - \frac{٥٢ \times ١٠}{١٣٠} = ١٠١$$

$$، م_ب = ٩٥ + \frac{١٧ \times ١٠}{٩٠} = ٩٦,٨٩$$

فئات الذكاء	ك	ح	ك ح	ك ح^٢
٧٠ —	٣١	٣ —	٩٣ —	٢٧٩
٨٠ —	٣٧	٢ —	٧٤ —	١٤٨
٩٠ —	٥٩	١ —	٥٩ —	٥٩
١٠٠ —	٣٥	—	—	—
١١٠ —	٢٣	١	٣٣	٣٣
١٢٠ —	٢٧	٢	٥٤	١٠٨
١٣٠ —	٨	٣	٢٤	٧٢
المجموع	٢٢٠		١٠١	٦٧٩
			٢٢٦ —	
			١٢٥ —	

جدول (٧٠) الانحراف المعياري للمجموعة الكلية

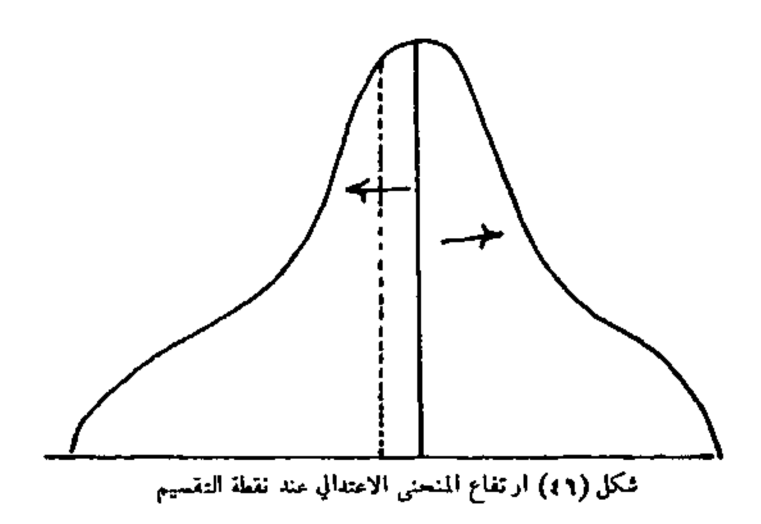
$$ع = ١٠ \sqrt{\frac{٦٨٩}{٢٢٠} - \left(\frac{١٢٥}{٢٢٠}\right)^٢} = ١٦,٧٦$$

ثالثا — أوجد نسبة عدد أفراد المجموعتين الى أفراد المجموعة الكلية (المجموعتين معا) ولنرمز لهما بالرمزين أ ب .

$$ففي هذا المثال أ = \frac{١٣٠}{٢٢٠} = ٠,٥٩$$

$$، ب = \frac{٩٠}{٢٢٠} = ٠,٤١$$

رابعا — ارجع الى جدول المنحنى الاعتدالي (٤٩) ، لمعرفة ارتفاع المنحنى الاعتدالي عن نقطة انفصال المجموعتين ، أي نبحث في هذا المثال عن ارتفاع عندما تكون المساحة الكبرى ٠,٥٩ والمساحة الصغرى ٠,٤١ وهو يساوي ٠,٣٩



شكل (٤٦) ارتفاع المنحنى الاعتدالي عند نقطة التقسيم

ولنرمز للارتفاع الذي نحصل عليه من الجدول عند نقطة التقسيم بالرمز «ص» .

خامسا – عوض في القانون الآتي لتحصل على معامل الارتباط الثنائي

$$\text{معامل الارتباط الثنائي} = \frac{م_أ - م_ب}{ع} \times \frac{أ \times ب}{ص}$$

$$\text{أي} = \frac{\text{الفـرق بين المتوسطين}}{\text{الانحراف المعياري للمجموعة الكلية}} \times \frac{\text{حاصل ضرب النسبتين}}{\text{الارتفاع عند نقطة التقسيم}}$$

واذا كانت قيمة م أ – م ب سالبة الاشارة دل ذلك على أن الارتباط عكسي على أنه اذا كان في هذا المثال متوسط نسبة ذكاء المنبسطين أكبر من متوسط نسبة ذكـاء الانطوائيين دل ذلك على أن هناك علاقة عكسية بين الذكاء وانطواء الشخصية أو أن هناك علاقة طردية بين الذكاء وانبساط الشخصية .

فمعامل الارتباط الثنائي في المثال السابق يمكن ايجاده من البيانات الآتية :

م أ = ١٠١   م ب = ٩٦,٨٩

ع = ١٦,٧٦   ص = ٠,٣٩

أ = ٠,٥٩   ب = ,٤١

$$\text{وهو يساوي} = \frac{١٠١,٠٠ - ٩٦,٨٩}{١٦,٧٦} \times \frac{٠,٥٩ \times ٠,٤١}{٠,٣٩} = ٠,١٦$$

وهو معامل ارتباط بالرغم من أنه موجب الا أنه ضعيف وهذا أمر طبيعي لما ينتظر للعلاقة بين النواحي الانفعالية والقدرات العقلية بوجه عام .

هذا وقد تمكن دنلاب [1] من تعديل القانون السابق لايجاد معامل الارتباط الثنائي الى الصورة الآتية $\frac{م_{أ} - م}{ع} \times \frac{أ}{ص}$

على اعتبار أن م هي متوسط قيم المجموعة الكلية .

التعديل الأخير يزيد من سهولة حساب المعامل نظرا لاقتصار حسابه على المجموعة (أ) والمجموعة الكلية ، وبذلك يتخلص الباحث من حساب معاملات المجموعة ب ، وبذلك يمكن حساب كل من $م_{أ}$ ، م ، ع في جدول واحد كما يلي :

المجموعة (أ)				المجموعة الكلية		
الفئات ف	التكرار ك	ح	ك ح	التكرار	ك ح	ك ح
٧٠–	١٥	٣–	٤٥–	٣١	٩٣–	٢٧٩
٨٠–	٢٢	٢–	٤٤–	٣٧	٧٤–	١٤٨
٩٠–	٢٧	١–	٢٧–	٥٩	٥٩–	٥٩
١٠٠–	٢٩	—	—	٣٥	—	—
١١٠–	١٥	١	١٥	٢٣	٢٣	٢٣
١٢٠–	١٧	٢	٣٤	٢٧	٥٤	١٠٨
١٣٠–	٥	٣	١٥	٨	٢٤	٧٢
المجموع	١٣٠		٦٤ ١١٦– ٥٢–	٢٢٠	١٠١– ٢٢٦– ١٢٥–	٦٨٩

جدول (٧١) حساب معامل الارتباط الثنائي

والجديد في الصورة الثانية هو م (متوسط قيم المجموعة كلها)

وهو يساوي $١٠٥ - \frac{١٢٥}{٢٢٠} \times ١٠ = ٩٩,٣٢$

يكون معامل الارتباط الثنائي بناء على ذلك $\frac{١٠١ - ٩٩.٣٢}{١٦.٧٦} \times \frac{٠.٥٩}{٠.٣٩} = ٠,١٦$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالصورة الأولى لهذا المعامل .

ومعامل الارتباط الثنائي يرمز له عادة بالرمز R_{Bi} ويمكن أن نرمز له بالرمز العربي رث .

معـــامل التـــوافق :

يختلف معامل التوافق عن معامل الارتباط السابقة في أن كلا من المتغيرين في المعامل الأول يصنف الى عدد من الأنواع المتميزة ، دون التقيد مطلقا بشرط اتصال التوزيع فيهما ، أي أن الأصل في استخدام هذا المعامل الحالات التي يختلف فيها أحد المتغيرين أو كلاهما اختلافا نوعيا — ولكن ليس معنى ذلك أنه لا يصلح في الحالات التي يختلف فيهما المتغيران اختلافا كميا متصلا .

واليك مثالا للحالات التي يستخدم فيها المعامل .

تدل الملاحظات الوراثية [1] على أن هناك اتجاها يؤدي الى التشابه بين لون عين الأم أو الأب ولون عين الطفل ، فلايجاد مدى هذه العلاقة بين هذين المتغيرين جمع باحث عددا من الحالات ولاحظ فيها لون عين كل أم ولون عين ابنها وحصل من هذه الملاحظات على مــا يأتي :

يلاحظ أن لون العين متغير منفصل Discrete Variable أي أن التصنيف هنا نوعي .

عين الأم / عين الأب	أسود	عسلي	أزرق	أخضر	المجموع
أسود	١٥	١٣	١٢	١٠	٥٤
عسلي	١٠	١٤	١٢	١٠	٤٦
أزرق	١٥	١٧	٢٠	١٣	٦٥
أخضر	١٢	١٤	١٦	٢٢	٦٤
المجموع	٥٢	٥٨	٦٠	٥٥	٢٢٥

جدول (٧٢) العلاقة بين لون عين الأم ولون عين الابن

ويمكننا أن ندرك من مجرد ملاحظة القيم في هذا الجدول أن لون عين الأم ولون عين الابن يرتبطان ارتباطا موجبا . فاذا نظرنا الى الصف الأول وهو يمثل الحالات التي يكون لون عين الابن فيها أسودا وجدنا أن أكبر تكرار في هذا الصف هو تكرار الخليــة الأولى (١٥) . وهي الخلية التي يكون فيها لون عين الأب كذلك أسودا . وأكبر تكرار في الصف الثاني هو الذي يكون لون عين كل من الأب والابن عسليا ، وفي الصف الثالث والرابع نلاحظ أيضا نفس الملاحظة .

وهذه الملاحظة هامة من مبدأ الأمر ، لأن معامل التوافق لا يعطي اشارة الارتباط فهو لا يدل عما اذا كان الارتباط سالبا أم موجبا ، ولكن هذا يعرف من شكل توزيع التكرارات في الجدول التوافقي وطريقة حساب معامل التوافق تنحصر في الخطوات التالية :

ـ لكل خلية من خلايا الجدول أوجد مربع تكرار الخلية مقسوما على حاصل ضرب التكرار الكلي للعامود التابعة له في تكرار الصف التابعة له ، فاذا رمزنا للعامود التابعة له احدى خلايا الجدول

بالرمز (أ) وللصف التابعة له بالرمز (ب)

كان الرمز الدال على الخلية (أ ب)

عامود أ	
خلية أ ب	صف ب

وتنحصر هذه العملية في ايجاد $\frac{ك^{2}_{أب}}{ك_{أ} \times ك_{ب}}$ ونظرا لأنهذا سيتبع في جميع الخلايا ثم

تجمع النواتج فان حاصل الجمع يمكن أن نرمز له بالرمز مجـ $\frac{ك^{2}_{أب}}{ك_{أ} \times ك_{ب}}$ أي حاصل جمع

خوارج قسمة مربع تكرار كل خلية على حاصل ضرب تكرار الصف التابعة له في تكرار العامود التابعة له .

وبتطبيق هذه العملية في المثال السابق نحصل على :

الصف الأول $+\frac{(١٠)^{٢}}{٥٠ \times ٥٥}+\frac{(١٢)^{٢}}{٥٠ \times ٦٠}+\frac{(١٣)^{٢}}{٥٠ \times ٥٨}+\frac{(١٠)^{٢}}{٥٠ \times ٥٢}$

الصف الثاني $+\frac{(١٠)^{٢}}{٤٦ \times ٥٥}+\frac{(١٢)^{٢}}{٤٦ \times ٦٠}+\frac{(١٤)^{٢}}{٤٦ \times ٥٨}+\frac{(١٠)^{٢}}{٤٦ \times ٥٢}$

الصف الثالث $+\frac{(١٣)^{٢}}{٦٥ \times ٥٥}+\frac{(٢٠)^{٢}}{٦٥ \times ٦٠}+\frac{(١٧)^{٢}}{٦٥ \times ٥٨}+\frac{(١٥)^{٢}}{٦٥ \times ٥٢}$

الصف الرابع $+\frac{(٢٢)^{٢}}{٦٤ \times ٥٥}+\frac{(١٦)^{٢}}{٦٤ \times ٦٠}+\frac{(١٤)^{٢}}{٦٤ \times ٥٨}+\frac{(١٢)^{٢}}{٦٤ \times ٥٢}$

٢ ـ اذا رمزنا لحاصل الجمع السابق بالرمز مج فان معامل التوافق يمكن حسابه مـــن :

$$\text{ق} = \sqrt{١ - \frac{١}{\text{مج}}} \quad \text{أو} \quad \sqrt{\frac{\text{مج} - ١}{\text{مج}}}$$

وقد رمزنا هنا لمعامل التوافق بالرمز (ق) ويرمز له عادة بالرمز (C) هذا ويمكن تسهيل الحساب قليلا بالتعديل الآتي :

$$١١,٤٦ \times ٠,٠٢ = \left(\frac{(١٠)^{٢}}{٥٥}+\frac{(١٢)^{٢}}{٦٠}+\frac{(١٣)^{٢}}{٥٨}+\frac{(١٥)^{٢}}{٥٢}\right)\frac{١}{٥٠} = \text{الصف الأول}$$

$$٠,٢٣ =$$

$$٩,٥٢ \times ٠,٠٢ = \left(\frac{(١٠)^{٢}}{٥٥}+\frac{(١٢)^{٢}}{٦٠}+\frac{(١٤)^{٢}}{٥٨}+\frac{(١٠)^{٢}}{٥٢}\right)\frac{١}{٤٦} = \text{الصف الثاني}$$

$$٠,١٩ =$$

$$١٩,٠٦ \times ٠٠٢ = \left(\frac{(١٣)^{٢}}{٥٥}+\frac{(٢٠)^{٢}}{٦٠}+\frac{(١٧)^{٢}}{٥٨}+\frac{(١٥)^{٢}}{٥٢}\right)\frac{١}{٦٥} = \text{الصف الثالث}$$

$$٠,٣٨ =$$

$$\text{الصف الرابع} = \frac{١}{٦٤}\left(\frac{(١٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(١٤)^{٢}}{٥٨} + \frac{(١٦)^{٢}}{٦٠} + \frac{(٢٢)^{٢}}{٥٥}\right) = ٠٫٠٢ \times ١٩٫٢٢$$

$$= ٠٫٣٨$$

$$\therefore \text{مج} = ٠٫٢٣ + ٠٫١٩ + ٠٫٣٨ + ٠٫٣٨ = ١٫١٨$$

$$\text{ويكون ق} = \sqrt{١ - \frac{١}{٠٫١٨}} = ٠٫٣٩$$

ومن المفيد أن تعرف ما اذا كان معامل التوافق يمكن مقارنته بمعامل الارتباط . الواقع أن معامل التوافق به عيب أساسي هام ، وهو أنه يتأثر كثيرا بعدد الأقسام في كل من المتغيرين أي أنه يعطي نتائج مختلفة اذا قسمت البيانات في المتغير الى ستة أقسام بدلا من أربعة ، ولذلك فان قيمته ينبغي أن ينظر اليها على أساس عدد الأقسام التي قسم اليها كل متغير . وهناك حد أقصى لقيمة معامل التوافق تبعا لأقسام الجدول .

ويعطينا « Kendall Yule »[1] القيم القصوي لمعامل التوافق في حالات عدد الخانات المبينة فيما يلي :

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٢ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٧٠٧

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٣ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٨١٦

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٤ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٨٦٦

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٥ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٨٩٤

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٦ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٩١٣

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٧ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٩٢٦

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٨ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٩٣٥

اذا كان عدد أقسام كل متغير ٩ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٩٤٣

اذا كان عدد أقسام كل متغير ١٠ فان معامل التوافق لا يزيد عن ٠٫٩٤٩

---

(١) Yule G.U. and Kandell, M.G. An Introduction to the theory of Statistics.

ونظرا لأن المعامل في حالات التقسيم الضيق يكون بعيدا في حده الأقصى عن الواحد الصحيح فان هذا المعامل يكون في حاجة الى تصحيح في هذه الحالات ، حتى يمكن مقارنته بالمعاملات الأخرى . وقد اقترح « Pearson, K. » [1] تصحيحا في حالات التقسيمات التي تقل عن أربع فئات لكل متغير ، ولكن اذا طبق نفس هذا التصحيح فيما اذا زاد عدد التقسيمات عن ذلك .

ولكن « Garret, H. » يقترح اقتراحا لهذا التصحيح أسهل كثيرا من تصحيح « Pearson » فهو يرى أن يقسم كل معامل نحصل عليه من الحساب على الحد الأقصى المبين عاليه لنفس عدد الأقسام ، وبذلك نحصل على معامل يصل الى الواحد الصحيح اذا كانت القيمة الناتجة معادلة للحد الأقصى المتوقع . ففي المثال السابق كان عدد أقسام كل متغير «٤» ، ولذلك فان الحد الأقصى للمعامل هو ٠,٨٨٦ وكان معامل التوافق الناتج من الجدول ٠٠,٣٩ فتصحيح هذا المعامل يصبح :

$$\text{ق} = (\text{بعد التصحيح}) = \frac{,٣٩}{٠.٨٦٦} = ٠,٤٥$$

وبذلك تسهل مقارنة معامل التوافق بمعامل الارتباط ، وقد يقترب المعاملان بعضهما من بعض كثيرا في بعض الحالات ، بحيث لا يحتاج معامل التوافق الى تعديل وأهم هذه الحالات هي :

١ — عندما يكون التقسيم مفصلا أي أن يقسم كل متغير الى خمسة أقسام أو أكثر .

٢ — عندما تكون العينة كبيرة العدد نسبيا .

٣ — عندما يكون التقسيم طبيعيا لا تصنع فيه ولا ضغط .

٤ — عندما يكون من المعقول أن نفترض أن كلا من المتغيرين موزع في الطبيعة توزيعا اعتداليا .

طريقة أخرى لحساب معامل التوافق :

هناك طريقة أخرى لحساب معامـــل التوافق تقتضي حساب قيمة معامل $كا^٢$ وسنشرح هذه الطريقة في الباب القادم عند شرح طريقة لحساب معامل $كا^٢$.

---

(١) Pearson K. On the measurement of the influences of Broad Categories — Biometrika, 9 (1913).

معامل فاي Phi Coeficient :

يعتبر هذا المعامل حالة خاصة من الحالات التي تستخدم فيها معامل التوافق . فهو لا يستخدم الا في الحالات التي يقسم فيها كل من المتغيرين الى قسمين متميزين (نوعين مختلفين) ومن أمثلتها الصفات وعكسها مثل الجنسين مذكر ومؤنث، حي وميت ، ملون وغير ملون ، استجابة وعدم استجابة ، شفاء وعدم شفاء ... الخ . فاذا أراد باحث معرفة أثر دواء خاص في شفاء نوع من الأمراض مثلا فيمكنه أن يختار عينة من المرضى بالمرض الذي هو مجال البحث ، ثم يقسم هذه العينة الى قسمين : قسم يعالج بالدواء الخاص وقسم لا يعطى أي نوع من العلاج ، ثم يبحث بعد مدة أثر هذا الدواء في شفاء المرض ، فيحصر عدد الذين شفوا باستعمال الدواء . ويقارن بعدد من شفوا بغير استعمال الدواء ، ولنفرض أن نتيجة هذا البحث كانت كما يلي :

العلاج / النتيجة	عولجوا بالدواء	لم يعالجوا بالدواء	المجموع	النسبة
شفوا من المرض	١١٥	٣٥	١٥٠	٠,٤٣
لم يشفوا من المرض	٢٥	١٧٥	٢٠٠	٠,٥٧
المجموع	١٤٠	٢١٠	٣٥٠	١,٠٠
النسبة	٠,٤٠	٠,٦٠	١,٠٠	

جدول (٧٢) جدول تكراري لحساب معامل فاي

يلاحظ من هذا الجدول أن أغلب الذين عولجوا بالدواء قد شفوا من المرض ، فقد شفي ١١٥ من ١٤٠ مريضا بهذا الدواء ، بينما لم يشف أغلب الذين لم يعالجوا بالدواء ، فلم تشف غير ٣٥ فقط من ٢١٠ دون تعاطي الدواء . مما يدل على أن للدواء أثر يذكر في شفاء المرض .

ويرمز لهذا المعامل بالرمز $\varnothing$ ولا مانع من أن نتخذ نفس الحرف رمزا لهذا المعامل هنا.

ولكي يسهل حساب معامل فاي في مثل هذا الجدول نحول هذه التكرارات الى نسب من المجموع الكلي ، أي بأن نجعل المجموع الكلي ١,٠٠ كما يلي ، كما نرمز لكل خلية بالجدول بالرموز المبينة :

العلاج / النتيجة	عولجوا بالدواء	لم يعالجوا بالدواء	المجموع
شفوا من المرض	٠,٣٣ (أ)	٠,١٠ (ب)	٠,٤٣ (هـ)
لم يشفوا من المرض	٠,٠٧ (حـ)	٠,٥٠ (د)	٠,٥٧ (ى)
النسبـــة	٠,٤٠ (هـ)	٠,٦٠ (ى)	١,٠٠

جدول (٧٤) تحويل الجدول التكراري إلى نسبة تكرارية .

وتحسب نسبة كل خلية بقسمة تكرارها على المجموع الكلي لعدد الحالات ، فالنسبة ٠,٢٣ قد حسبت من $\frac{١١٥}{٣٥٠}$ ، ٠,١٠ من $\frac{٣٥}{٣٥٠}$ ، ٠,٠٧ من $\frac{٢٥}{٣٥٠}$ ، ٠,٥٠ من $\frac{١٧٥}{٣٥٠}$

والقانون الذي يحسب به معامل ϕ هو كالآتي :

$$\phi = \sqrt{\frac{\text{أ د} - \text{ب حـ}}{\text{هـ ى هَـ ىَ}}}$$

وهو يساوي في هذا المثال :

$$\sqrt{\frac{(٠,٣٣)(٠,٥٠) - (٠,١٠)(٠,٠٧)}{(٠,٤٣)\ (٠,٥٧)\ (٠,٤٠)\ (٠,٦٠)}}$$

$$= \frac{٠,١٦}{٠,٢٤}$$

$$= ٠,٦٧$$

خاتمة في معامـــل الارتباط :

درسنا في هذا الباب عددا من معاملات الارتباط ، ولكل من هذه المعاملات حالات

خاصة ينفصل فيه دون غيره . وأهم هذه المعاملات وأكثرها شيوعا هو معامل ارتباط بيرسون بصوره المختلفة . فمعامل ارتباط الرتب لسيبرمان يستخدم عادة اذا كان الحصول على الرتب المختلفة لأفراد العينة أكثر دقة من اعطاء كل فرد قيمة خاصة . ففي كثير من الأحيان يكون من الصعب امتلاك الأفراد لهذه الصفة وميزة معامل ارتباط سيبرمان سهولة حسابه ، الا أن مما يزيد صعوبة حسابه تكرار الترتيب وكبر عدد أفراد العينة . أما معامل ارتباط بيرسون فبالرغم من أنه يحتاج الى عمليات حسابية كثيرة الا أن الآلات الحاسبة تسهل ذلك كثيرا ، ولذا فان هذا هو المعامل الذي يعتمد عليه أغلب الباحثين في بحوثهم . والصورة المشتملة على الجدول التكراري المزدوج تستخدم بنوع خاص في حالات العينات الكبيرة ومن المهم أن يتأكد الباحث من استيفاء الشروط اللازمة لاستخدامه قبل الالتجاء اليه . وأهمها أن تكون العلاقة مستقيمة أما اذا كانت العلاقة منحنية استعيض عنه بنسبة الارتباط .

وفي الحالات التي لا يتسنى فيها تقسيم أحد العاملين الى أكثر من فئتين بينما يمكن تقسيم العامل الآخر تقسيما متصلا متدرجا ، فان المعامل الذي يصلح في هذه الحالة هو المعامل الثنائي ، أما اذا كان هذا هو الحال مع المتغيرين استخدم حينئذ معامل الارتباط الرباعي . ويجب ألا ننسى أن استخدام كل من معامل الارتباط الثنائي والرباعي ينبغي أن يكون مؤسسا على أن كلا من المتغيرين يتغير تغيرا مستمرا Continuous وان الاقتصار على فئتين فقط لا يغير من هذا الأساس وانما قصد بهذا الاجراء التغلب على صعوبة الحصول على تقسيم أكثر دقة وتفصيلا ، بحيث اذا اشتمل البحث على أنواع متميزة منفصل بعضها عن بعض أصبح على الباحث أن يتجنب استخدام هذين المعاملين ، واستخدم بدلهما معامل التوافق في حالة امكان التقسيم الى أكثر من فئتين ، أو معامل فاي في حالة تقسيم كل من المتغيرين الى فئتين منفصلتين .

أما معامل الارتباط المتعدد والجزئي فهما يستخدمان بنوع خاص في حالة حرص الباحث على أن يعمل حسابا لأكثر من متغيرين ، ويفيد الباحث كثيرا معرفة معادلة الانحدار المتعدد ليقف على مدى أهمية العوامل المختلفة في التأثير في ظاهرة أو صفة خاصة . والفائدة الأساسية من معامل الارتباط الجزئي هي استبعاد أثر عوامل خاصة والابقاء على عوامل أخرى في احدى الظواهر أو الصفات حين يتعذر على الباحث أن يقوم بهذا الاستبعاد تجريبيا . وتثبيت هذا العامل أو هذه العوامل في العينة المختارة .مما لايتسع له هذا المجال .

واذا استخدم الباحث احدى هذه الطرق فيجب أن يستخدم نفس الطريقة اذا كان يهدف المقارنة . فليس من الصواب أن نحسب معامل الارتباط بين أ ، ب بمعامل ارتباط الرتب ثم نحسب معامل التوافق بين ب ـ حـ ثم تقارن بين هذين المعاملين بعد ذلك لنقرر ما اذا كانت العلاقة بين أ ، ب أكبر أو أصغر قدرا من العلاقة بين ب ، حـ بل يجب توحيد الطريقة في حالات المقارنة .

وفي تفسير معامل الارتباط ينبغي أن يكون الباحث حريصا : فمجرد وجود الترابط لا يدل على أن أحد العاملين سبب العامل الآخر أو نتيجة له . فالعلاقة السببية كما ذكرنا في الباب الأول لا يمكن الوصول اليها عن طريق الاحصاء فقط . بل يحتاج علاوة على ذلك ادراكا لطبيعة هذين العاملين مما لا يتيسر للاحصاء الوصول اليه .

وينبغي ألا يغيب عن بالنا أن قيمة معامل الارتباط متعلقة لدرجة كبيرة بالعينة التي يحسب على أساسها فلا يصح أن نقول أن معامل الارتباط بين الميل الاجرامي والذكاء هو ... فليس هناك معامل ارتباط مطلق بل ان المعامل نسبي دائما ومرتبط بصفات العينة .

ولكي نوضح اختلاف قيمة معامل الارتباط باختلاف العينة نفرض أنه أجري اختباران على ٦ أشخاص ، أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، و ـ وكانت درجاتهم فيهما كالآتي :

	اختبار (أ)	اختبار (ب)
أ	٥٠	٢٠
ب	٢٥	٢٥
حـ	٨	٨
د	٥٠	٢٠
هـ	١٥	١٥
و	٥٠	٢٠

ولنفرض أننا أخذنا عينة من ثلاثة أفراد فقط من هذه المجموعة وكان هؤلاء الأفراد هم أ ، د ، و ـ ودرجاتهم في الاختبارين هما :

	اختبار (أ)	اختبار (ب)
أ	٥٠	٢٠
د	٥٠	٢٠
و	٥٠	٢٠

فاذا حسبنا معامل الارتباط بالانحرافات أو القيم الخام بين درجات الاختبارين في هذه العينة وجدنا أن معامل الارتباط = صفر بينما لو اخترنا ب جـ ، هـ ، ودرجاتهم كالآتي :

	اختبار (أ)	اختبار (ب)
ب	٢٥	٢٥
حـ	٨	٨
هـ	١٥	١٥

لكان معامل الارتباط = ١

وعلى وجه العموم فانه كلما كانت القيم في العينة مختلفة اختلافا متسعا كلما كانت قيمة معامل الارتباط أكثر ارتفاعا ، بينما كلما كانت العينة متقاربة في الصفتين المطلوب ايجاد العلاقة بينهما كلما صغرت قيمة معامل الارتباط ، ويمكن توضيح هذا من الجدول الارتباطي الآتي الذي يبين العلاقة بين أطوال ١٠٠ طالب من طلبة الجامعة وأوزانهم .

الطول / الوزن	١٥٠–	١٥٥–	١٦٠–	١٦٥–	١٧٠–	١٧٥–	١٨٠–	المجموع
٥٠ –	٢							٢
٥٥ –	٣	٤	٢	٢				١١
٦٠ –	٢	٢	٥	٦	١	١		١٧
٦٥ –	٢	٣	٤	٥	٢	١		١٧
٧٠ –		١	٢	٢	٥	١	١	١٢
٧٥ –	١		٢	٤	٥		١	١٣
٨٠ –			١	٣	٤	٤	١	١٣
٨٥ –				٢	٥	٣	٥	١٥
المجموع	١٠	١٠	١٦	٢٤	١٢	١٠	٨	١٠٠

جدول (٧٥) أثر العينة المختارة في معامل الارتباط بين الطول والوزن

من ملاحظة تكرار خلايا الجدول يتضح أن معامل الارتباط بين الطول والوزن موجب مرتفع. ولنفرض أن الجدول اقتصر على التكرارات المحصورة في أحد المربعين الموضحين داخل الجدول. أي أننا قصرنا الحساب على عينة مختارة Selected ومتجانسة تجانسا كبيرا « Too Homogeneous » أي اخترنا ٣٣ طالبا (المربع العلوي) أطوالهم من١٥٥ الى أقل من١٧٠سم وأوزانهم من ٥٥ كجم الى أقل من ٧٠ كجم. أو ٢٨ طالبا (المربع السفلي) أطوالهم محصورة بين ١٦٥ سم وأقل من ١٨٠ سم وأوزانهم بين ٧٠ كجم الى أقل من ٨٥ كجم فان معامل الارتباط بين الوزن والطول في احدى هاتين العينتين يكاد يكون صفرا.

من هذا يتضح أن الباحث ينبغي أن يكون حريصا في اختيار العينة التي يحسب على أساسها معامل الارتباط حتى لا تكون عينة مختارة ومتجانسة تجانسا كبيرا ، كما ينبغي أن يقرن قيمة معامل الارتباط الذي ينتج في بحثه بذكر العينة التي أجرى عليها البحث.

أسئلة على الباب الخامس

الجدول الآتي يبين درجات خمسين طالبا في خمس استبيانات للشخصية .

رقم الطالب	التوافق الاجتماعي	الخضوع والسيطرة	الانطواء	الشعور بالنقص	العصبية
١	٨	١٥	١١	٢٢	١٤
٢	٩	٢٧	١٦	٢٥	١٠
٣	١٨	١٢	١٠	٢٠	١٢
٤	١١	٣٢	١٢	١٤	٩
٥	١٧	٢٥	١٥	١٩	١٢
٦	١٢	١٧	١٧	٢٥	١٤
٧	١٥	٦	١٠	٢٠	٩
٨	١٩	١٨	١١	٣١	١٧
٩	١١	٩	١٣	٢٥	١٢
١٠	١٣	٢٥	١٧	٢٨	١٥
١١	١٤	٢٠	١٥	٢٥	١٢
١٢	١٢	٣٢	١٤	٢٤	١١
١٣	٢٠	٥	١٠	٢٧	١٦
١٤	١٣	١٦	١٢	٢٥	١٣
١٥	١٥	١٧	١٤	٢٦	١١
١٦	١٤	٣٨	١٥	٢٢	١٢
١٧	١٨	٤٢	١٧	٢٩	١٤
١٨	٢١	٣٥	١٢	٢٤	١٤
١٩	١٢	٣٠	١٤	٢٥	١٥
٢٠	١٤	٢٢	١٥	٢٨	١٦
٢١	١٤	٣٥	١٦	٣٢	١٨
٢٢	١٣	١٧	١٥	٢٥	١١
٢٣	١٩	٨	١٣	٢٤	١١

٢٤	١٠	٢٥	١٢	٢٧	١٢
٢٥	١٢	٣٣	١٤	٢٢	١٤
٢٦	١٣	٢٧	١٥	١٨	١١
٢٧	١١	٢٥	١٢	١٧	٨
٢٨	١٤	١٩	١٧	٢٨	١٢
٢٩	١٨	١٦	١٠	١٥	٩
٣٠	١٣	٣٢	١٥	٢٨	١٥
٣١	١١	١٥	١١	١٥	١١
٣٢	١٢	٢٥	١٢	١٨	١٧
٣٣	١٨	٢٠	١٥	٢٠	١٢
٣٤	١٥	٣٣	١٧	٢٧	١٥
٣٥	١٤	٣٠	١٥	٢٢	١٢
٣٦	١٩	٢٤	١١	٢١	١٥
٣٧	٢١	١٤	١٠	٢٥	١١
٣٨	١٧	١٢	٨	١٩	١٠
٣٩	١٢	٢٣	١٥	٢٥	١٥
٤٠	١٤	٣٥	٢٥	٣٠	١٥
٤١	١٧	٢٥	١٠	٢٠	١١
٤٢	١٩	٢٢	١٢	٢٢	١٢
٤٣	١٢	٣٧	١٥	٢٠	١١
٤٤	١٥	٤٢	١٨	٢٨	١٣
٤٥	١٢	٢٥	١٣	٢٦	١٤
٤٦	١٤	٢٨	١٩	٣٥	١٤
٤٧	٢١	٣٩	١٢	٢٤	٩
٤٨	١١	١٧	١٤	١٨	٩
٤٩	١٣	٢٨	١٥	١٩	١٧
٥٠	١١	١٢	١١	٢١	١٠

جدول (٧٦) درجات خمسين طالباً في خمس استبيانات للشخصية

١ ـ احسب معامل ارتباط الرتب بين درجات عشرين طالبا (١ ـ ٢٠) في الاستبيانين .

أولا ـ (١) ، (٤)

ثانيـا ـ (٢) ، (٣)

ثالثا ـ (٣) ، (٥)

رابعا ـ (٢) ، (٤)

٢ ـ باستخدام معامل ارتباط بيرسون أوجد مدى العلاقة بين درجات عشر طلبة (١ ـ ١٠) في الاستبيانين .

أولا ـ (٣) ؛ (٤)

ثانيا ـ (٢) ؛ (٥)

ثالثا ـ (١) ، (٥)

(استخدم الدرجات الأصلية « الخام » كما هي ، دون الاستعانة بتخطيط الانتشار) .

٣ ـ حول الدرجات في المسألة السابقة الى انحرافات عن المتوسط الحسابي واحسب معاملات الارتباط من هذه الانحرافات ، وحقق النتائج الثلاثة التي حصلت عليها في المسألة السابقة بهذه الطريقة .

٤ ـ استخدم تخطيط الانتشار والجدول التكراري المزدوج في حساب معامل الارتباط بين درجات كل استبيان ودرجات غيره من الاستبيانات ، وضع النتائج التي تحصل عليها في مصفوفة ارتباطية على الصورة الآتية :

	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
(١)	ـ	ر٢١	ر٣١	ر٤١	ر٥١
(٢)	ر١٢	ـ	ر٣٢	ر٤٢	ر٥٢
(٣)	ر١٢	ر٣٢	ـ	ر٤٣	ر٥٣
(٤)	ر١٤	ر٢٤	ر٣٤	ـ	ر٥٤
(٥)	ر١٥	ر٢٥	ر٣٥	ر٤٥	ـ

٥ ـ الجدول الآتي يبين العلاقة بين الاتجاه لعدد من الأشخاص نحو التعصب الديني ودرجاتهم في استبيان لقياس مدى التدين والمطلوب حساب معامل الارتبـــاط الثنائي Bi Serial بين هذين المتغيرين .

الاستبيان / الاتجاه	صفر ـ	٥ ـ	١٠ ـ	١٥ ـ	٢٠ ـ	٢٥	٣٠ ـ	٣٥ ـ	المجموع
موافق	٢	—	٤	٥	١٠	١٢	١٥	٢٥	٧٣
معارض	١٥	١٣	٢٥	١٠		٤	—	١٠	٧٧
المجموع	١٧	١٣	٢٩	١٥	١٠	١٦	١٥	٣٥	١٥٠

جدول (٧٧) العلاقة بين الاتجاه نحو التعصب الديني ودرجات استبيان مدى التدين

٦ ـ قسم درجات استبيان التوافق الاجتماعي (١) في الأسئلة السابقة الى قسمين : أقل من ١٥ ، ١٥ فأكثر . ودرجات تباين الشعور بالنقص (٤) الى ست فئات : ١٢ ، ١٦ ـ ، ٢٠ ـ ، ٢٤ ـ ، ٢٨ ـ ، ٣٢ ـ . وكون جدولا تكراريا ٢ × ٦ واستنتج من هذا الجدول معامل الارتباط الثنائي بين درجات هذين الاستبيانين .

٧ ـ الجدول الآتي يبين العلاقة بين جنسية الفرد ونوع الموسيقى التي يفضلها .

جنسية الشخص	نوع الموسيقى المفضلة: انجليزي	فرنسي	ألماني	ايطـــالي	أسباني	المجموع
انجليزي	٣٢	١٦	٧٥	٤٧	٣٠	٢٠٠
فرنسي	١٠	٦٧	٤٢	٤١	٤٠	٢٠٠
ألماني	١٢	٢٣	١٠٧	٣٦	٢٢	٢٠٠
ايطالي	١٦	٢٠	٤٤	٧٦	٤٤	٢٠٠
أسباني	٨	٥٣	٣٠	٤٣	٦٦	٢٠٠
المجموع	٧٨	١٧٩	٢٩٨	٢٤٣	٢٠٢	١٠٠٠

جدول (٧٨) العلاقة بين الجنسية والنوع المفضل في الموسيقى

احسب معامل التوافق (ق C) بين هذين المتغيرين .

الباب السادس

العينات ومقاييس الدلالة

= العينات : شروطها وطرق اختيارها .

= ثبات المقاييس الاحصائية :

المتوسط الحسـابي

الوسيـــط

معامــل الارتبـاط

النسبــة المئويــة

الانحــراف المعيــاري

= دلالة الفروق والفرض الصفري :

النسبة الحرجــة

= مقــاييس الدلالــة :

اختبـــار « ت »

اختبـــار كا ٢

= تحليــل التباين .

العينـــات واختيـــارها :

من أهم المشاكل التي يصادفها الباحث مشكلة اختيار العينة التي يجري عليهـا البحث . لأنه يتوقف على هذه العينة كل قياس أو نتيجة يخرج بها ، فالاختبار العقلي قد يوصف بأنه صعب أو متوسط أو سهل حسب العينة التي يطبق عليها ، والمتوسط الحسابي لأي صفة نفسية أو اجتماعية يتغير بتغير المقياس الذي يستخدم في هذا القياس ، كما يتغير تغيرا كبيرا تبعا للعينة التي يختارها الباحث في قياس هذه الصفة . ومعامل الارتباط بين أي متغيرين كذلك – يتوقف على درجة انسجام أو اختلاف العينة التي يحسب فيها هذا المعامل .

ويضطر الباحث لاجراء بحثه على عينة محدودة العدد لا على المجتمع الأصلي بأكمله ، لأن اجراء البحوث على المجتمع الأصلي بأكمله يكلف الباحث قدرا كبيرا جدا من الوقت والجهد والمال . ويكفي أن نتصور مقدار الوقت والجهد الذي يبذل عندما تنظم الحكومة القيام باحصاء عام كل عشر سنوات ، مع أن الاحصاء لا يشتمل الا على عملية عد بسيط وحصر للأفراد الموجودين . فان كان البحث يشتمل على اختبار وتحقيق حالات اجتماعية وبحث حالات فردية Case Study كانت الصعوبة التي يصادفها الباحث في تطبيق بحثه على المجتمع بأكمله مضاعفاً / ولا سيما وأن الاحصاء قد بلغ من التقدم الآن مرحلة يستطيع الباحث أن يستنتج من العينة الصغيرة المحدودة ما يود استنتاجه عن المجتمع الأصلي Population بدرجة لا بأس بها من التأكد . والباحث عند اختيار العينة لا يقوم بهذا الاختيار دون التقيد بنظام أو وسيلة علمية خاصة بل هناك شروط خاصة ينبغي توافرها في العينة حتى نستعيض بها عن المجتمع الأصلي الكبير . ومن أهم شروط العينة الشرطان الأساسيان الآتيان :

١ – أن تكون العينة ممثلة Representative للمجتمع الأصلي . فاذا كان المجتمع الأصلي مثلا مكونا من صندوق من البلي : الأزرق والأصفر والأحمر وأردنا أن نأخذ

عينة من هذا الصندوق فكلما اشتملت العينة على جميع الألوان المكونة لهذا الصندوق كانت العينة صالحة لتمثيل المجتمع .

٢ ـ أن تكون لوحدات المجتمع الأصلي فرصا متساوية Equal Chances في الاختيار . وكثيرا ما يقع الباحث في خطأ عدم استيفاء هذا الشرط في العينة التي يختارها دون قصد منه ، فاذا كان البحث يتعلق باجراء استبيان على مجموعة خاصة ، كان من السهل عليه أن يختار الأشخاص القريبين منه أو المحتكين به ، وفي هذا قصر الاختيار على مجموعة دون غيرها ، وعدم اعطاء جميع أفراد المجتمع فرصا متساوية في الاختيار .

وغالبا ما يكتفي الباحث بالشرط الثاني ، لأن فيه عادة ضمان لاستيفاء الشرط الأول فاذا ضمنا تساوي فرص الاختيار لجميع الأفراد حصلنا عادة على عينة ممثلة للمجتمع الأصلي ، ويمكن للطالب أن يجري بنفسه التجربة الآتية :

ضع ٢٠٠ قطعة من قطع الورق الصغيرة في صندوق وقسمها الى خمسة أقسام أي ٤٠ قطعة في كل قسم ، واكتب الرقم (١) على قطع القسم الأول ، (٢) على قطع القسم الثاني ، (٣) على قطع القسم الثالث ، (٤) على قطع الرابع ، (٥) على قطع القسم الخامس .

ثم اخلط هذه القطع جميعها خلطا جيدا في الصندوق . ثم اختر عينات كل منها من خمس ورقات مع ملاحظة الأرقام المكتوبة على أوراق العينة وارجاعها للصندوق في كل مرة . وكرر ذلك حوالي عشرين مرة أو أكثر تلاحظ أن خمس عدد الأوراق في العينات تقريبا مكتوب عليها الرقم (١) . وخمسها أيضا مكتوب عليه الرقم (٢) و ... وهكذا مما يوضح أن العينة المختارة هي في نفس الوقت ممثلة للمجتمع الأصلي ، لأنها تتكون من نفس الصفات بنفس النسب .

والطرق الشائعة لاختيار العينات يمكن حصرها فيما يأتي :

العينة العشوائية Random Sample :

يقصد بالعينة العشوائية تلك العينة التي لا تتقيد بنظام خاص أو ترتيب معين مقصود في الاختيار . وبذلك نضمن لجميع أفراد العينة فرصا متساوية . وفي هذه الحالة توصف العينة بأنها غير متحيزة Unbiassed . والطريقة العادية التي يميل اليها العامة دائما وهي كتابة أسماء أو أرقام العينة في أوراق صغيرة وتطبيقها وخلطها تماما ثم اختيار العـــدد

المطلوب من بين هذه الأوراق ، دون تمييز بين الأوراق المختلفة هي مثال من أمثلة العينة العشوائية ، كما أن هناك وسيلة مبسطة أخرى تستخدم لنفس هذا الغرض . فاذا أردنا أن نختار عينة من خمسين فردا من بين مجموعة من خمسمائة شخص مثلا نكتب أسماء هؤلاء الأشخاص مرتبة ترتيبا أبجديا ، ومن الطبيعي أن الترتيب الأبجدي لا يعطي نظاما خاصا في اختيار العينة مهما كان غرض البحث (الا اذا كان البحث متعلقا بأسماء الأشخاص بطبيعة الحال) ثم أخذ شخص واحد من كل عشرة أشخاص ، فيمكن مثلا أن يختار في العينة الأشخاص الذين أرقامهم ١ ، ١١ ، ٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ٥١ ... الخ أو ٦ ، ١٦ ، ٢٦ ، ٣٦ ... الخ . فبالرغم من أن هناك نظام في هذا الاختيار الا أن الباحث لم يتحكم في هذا النظام ، فليس هناك اتجاه خاص يربط بين مبدأ اسم كل شخص والناحية الخاصة التي يهدف اليها البحث .

ويطلق كثير من الباحثين الاجتماعيين على هذا النوع من العينة اسم الاختيار المباشر من الملف « Direct File Sampling » ويقتضي هذا الاختيار الاطلاع على الملف المحتوي على أفراد المجتمع الأصلي (ان كان من المتيسر ذلك) ، ثم اجراء الاختيار من الأفراد المدونة في هذا الملف مباشرة .

وبالرغم من السهولة الظاهرة في هذه الطريقة الا أن كثيرا من الباحثين يقعون في أخطاء عند تطبيقها . ففي احدى الاستفتاءات التي أجريت في الولايات المتحدة الخاصة بانتخاب رياسة الجمهورية قبل اجرائه ، اختيرت العينة من بين أسماء الأشخاص المدونة أسماؤهم في كراسة أرقام التليفون بطريقة عشوائية الا أن الواقع أن حصر الاختيار من بين أسماء الأشخاص المدونين في هذه الكراسة يحد من اختيار العينة ، لأنه من الطبيعي أن الأشخاص الذين اختيرت منهم العينة هم فئة خاصة من المجتمع الأصلي وليس المجتمع الأصلي كله . وهم عادة فئة أحسن حالا وأرقى من حيث المستوى الاقتصادي الاجتماعي من الذين لم تدرج أسماؤهم ، وبهذا وقع الاستفتاء في خطأ غير مقصود ، وهو عدم اعطاء فرص متساوية لأفراد المجتمع الأصلي . باهمال عدد منهم وحرمانهم من حقهم في الاختيار في العينة .

ويعلق نيو كومب Newcomb [1] على احتمال وقوع الباحث في خطأ تطبيق العينة العشوائية دون قصد منه حين يقول :

---

(١) Newcomb. T. Social Psycholegy.

« اذا كان على الباحث أن يقابل تبعا للعينة العشوائية أشخاصا لا يميل لمنظرهم ، أو أن يفضل أن يتعرض لأقسام خاصة من المدينة أو حتى اذا تجنب الخروج من منزله في يوم مطير ، فانه يكون من السهل عليه أن يملأ بياناته دون أن يتعرض لما يكرهه » .

وللتقليل من العامل الشخصي بقدر الامكان تلجأ الهيئات الى الوسائل الآلية في اختيار العينة ، كما يحدث مثلا في سحب أرقام اليانصيب أو في استخدام زهر اللعب والأرقام التي يقع عليها لتحديد الاختيار . وقد ذكرنا سابقا عند الكلام على المنحنى الاعتدالي كيف تتحددهذه الأرقام بعامل الصدفة .

العينـــة الطبقيـــة Stratified Sample :

العينة الطبقية هي تلك العينة التي يتم اختيارها على مرحلتين :

١ ــ مرحلة تحليل المجتمع الأصلي .

٢ ــ مرحلة الاختيار العشوائي في حدود صفات المجتمع الأصلي .

فالباحث في هذه الطريقة يبدأ بدراسة المجتمع الأصلي ، فيعرف الأوصاف المختلفة المشتمل عليها ، والنسب التي تتمثل بها كل صفة في هذا المجتمع ، وبعد هذه الدراسة يتبع نظاما عشوائيا متقيدا بنتائج تحليله في الخطوة الأولى . ولنفرض أن باحثا أراد أن يبحث المستوى الاقتصادي الاجتماعي لطلبة كلية من الكليات وأراد اختيار عينة من طلبة الكلية متبعا هذه الطريقة ، فان عليه أن يدرس طلبة الكلية من نواحي كثيرة أهمها : ــ

(أ) نسبة عدد طلبة الأقسام المختلفة والسنوات المختلفة .

(ب) نسبة الطلبة الى الطالبات .

(ج) نسبة الأديان المختلفة .

(د) صناعة الوالد أو ولي الأمر .

(هـ) منطقة السكن .

(و) مستوى تعلم الوالدين . . .

. . . . . . الخ .

وهكذا فان على الباحث أن يعمل حسابا لعوامل كثيرة حتى يجعل العينة التي يختارها

ممثلة تمثيلا تاما بقدر الامكان للمجتمع الأصلي . فيحافظ على النسب المختلفة والأنواع المتباينة في العينة التي يختارها . فالعينة الطبقية لا يمكن وصفها بأنها عينة عشوائية أو عينة مقيدة ، ذلك لأنها تجمع بين الناحيتين فهي مقيدة بأوصاف المجتمع الأصلي وعشوائية في حدود هذه الأوصاف .

ويطبق هذا النوع في البحوث الاجتماعية تحت أسماء وصور مختلفة أكثر شيوعـا Quota Sampling, Area Sampling

وفي النوع الأخير تحدد المساحات أو الأقسام التي تقسم اليها المنطقة أو المدينة الواحدة، ولذا فمما يسهل هذا النوع من الاختيار أن يكون لديه خريطة للمنطقة أو القسم أو المساحة المراد تمثيلها في العينة ، ثم تختار المناطق التي تمثل في العينة اما بطريقة عشوائية أو بشروط خاصة يضعها المجرب . ففي حالة استفتاءات الرأي العام مثلا يتعين على المجرب بعد وضع تصميم خطة العينة أن يتصل بجميع أفراد المنطقة التي يختارها أو بعدد ما يختاره منها بطريقة ما . ومن عيوب هذه الطريقة أن بعض الأشخاص المراد استطلاع رأيهم ينتقلون من مكان لآخر أثناء تطبيق الاستفتاء ، أو أن بعض المختارين في العينة قد لا يميلون للتعاون مع الباحث فيضطر الباحث الى الاستعاضة عنهم بغيرهم . وسيأتي تفصيل هذه الطريقـة فيما بعد .

وواضح أن هذه الطريقة تستغرق جهدا في تحليل المجتمع ، كما تحتاج الى حرص لا يقل عما تتطلبه الأولى ، فليس من السهل على الباحث أن يجعل العينة ممثلة تمثيلا تامـا للمجتمع .

العينة المقيدة Controlled Sample :

العينات التي سبق وصفها عينات تؤخذ من مجتمع كبير وتبذل جهود المجرب لكي يصل الى عينة تقوم مقام المجتمع الأصلي بوجه عام ، الا أن بعض البحوث يتطلب عينات مقيدة محددة بأوصاف خاصة ، وبذلك تكون عملية الاختيار من المجتمع الأصلي عملية مشترطة بشروط تحدد الأفراد الذين تشتمل عليهم العينة المطلوبة . فاذا أراد الباحث أن يجري بحثه على طلبة الكلية الممتازين علميا فقد يحدد هذا الامتياز العلمي بأنه يشتمل على مرتبة جيد جدا على الأقل في النتيجة النهائية لمواد العام الذي يجري فيه البحث ، وعلى ذلك فان الخطوة الأولى في اختيار أفراد العينة تنحصر في تحديد الأفراد في المجموعة الأصلية (طلبة وطالبات الكلية جميعا) الذين ينطبق عليهم هذا الشرط ، أي الحائزين على درجة

جيدا جد على الأقل . وفي هذه الحالة قد يكون عدد هؤلاء الطلبة قليلا لدرجة أن العينة تستنفذهم جميعا وبذلك لا تكون المشكلة مشكلة اختيار عينة من بين أفراد المجتمع ، بل مشكلة الحصول على عدد كاف من الأفراد لغرض البحث . وكلما كثرت الشروط اللازمة في العينـــة صعب الحصول عليها بطبيعة الحال وقـــل عدد الأفراد الذين يتم الاختيار من بينهم ، أما اذا كان المجتمع الأصلي مشتملا على عدد كبير من الأفراد المستوفين لجميع الشروط اللازمة في العينة ، فان من اللازم بعد عملية الحصر الأولى اجراء عملية اختيار اما عن طريق عشوائي باضافة شرط جديد يحدد من عدد الأفراد اللائقين للعينة . ففي المثال السابق له اذا كان عدد الحائزين على تقدير « جيد جدا » في مواد العام الدراسي أكثر من العدد المطلوب قد يميل الباحث الى زيادة التحديد فيقتصر بحثه على الطلبة دون الطالبات ، أو على طلبة وطالبات السنتين النهائيتين فقط ، أي أن اختيار العينة في هذا النوع يتم أيضا على خطوتين ، تشتمل الخطوة الأولى على حصر الأفراد المستوفين للشروط في المجتمع والمرحلة الثانية على اختيار العينة المطلوبة من هؤلاء الأفراد . وعلى هذا فمن الممكن اعتبار هذا النوع من العينة ضمن نوع العينة الطبقية السابقة .

أما تحديد أي نوع من أنواع العينة التي سبق وصفها هو الصالح للباحث فهذا يتوقف على طبيعة البحث وهدفه ، وقد يجد الباحث نفسه مضطرا الى استخدام عينة من نوع خليط من الأنواع جميعها .

ثبـــات المقاييس الاحصائية :

اذا كان من المتعذر على الباحث أن يشتمل بحثه على جميع أفراد المجتمع الأصلي وأنه يتعين عليه ازاء هذه الصعوبة أن يتضمن بحثه عينة محدودة العدد فقط فان من المهم أن نتساءل عن مدى دقة وثبات النتائج التي يحصل عليها من بحثه على العينة المحدودة . بمعنى لو حدث وكرر الباحث نفس البحث وقد يغير في هذا الاجراء المتكرر أفراد العينة فما هو مدى التغير في المعاملات والمقاييس التي يجدها في كل مرة ؟ وهل هذا التغير كبير لدرجة تجعلنا نشك في أن العينات المختلفة في مرات البحث المتكررة قد جاءت من مجتمع أصلي واحد ؟ أو أن هناك فرقا جوهريا بين نتائج هذه التجارب المتكررة لدرجة تجعلنا نشك في الاعتماد على أيها على أنها تقدير ناجح Estimation للمعاملات والنتائج التي يحصل عليها الباحث لو أمكنه (جدلا) اجراء البحث على جميع أفراد العينة الأصلية .

ويميل الاحصائيون الى التفريق بين أسماء ورموز المعاملات المختلفة في العينة ومـــا

يقابلها في المجتمع الأصلي. فبينما يسمون معاملات المجتمع الأصلي Population Parameters يسمون معاملات العينة Sample Statistics . ومـــن الطبيعي أنه لا يمكن مطلقا التنبؤ بالمعاملات والنتائج الحقيقية من معرفة المعاملات والنتائج التي يحصل الباحث عليها من العينة مهما أحكم اختيارها بدقة تامة . ولكن الباحث يستطيع أن يضع حدودا للقيمة المتوقعة في المجتمع الأصلي ، ويقرن هذه الحدود بنسبة احصائية ، هي نسبة الثبات أو التأكد ، وقد سبق أن ذكرنا ذلك في الباب الأول عند الكلام عن فوائد الاحصاء في البحوث العلمية . والباب الحالي هو المتعلق بمعاملات ثبات احصائيات العينة ومـــدى الاعتماد عليها .

ويخطىء كثير من الباحثين والمجربين باهمال حساب معامل الثبات للنتائج التي يحصلون عليها ، متخذين النتائج التي يحصلون عليها في بحوثهم المحددة بعينة مخصوصة وظروف محددة على أنها النتائج التي كانوا يحصلون عليها عند اشتمال البحث على جميع أفراد المجتمع وتحت ظروف طبيعية للغاية ، فاذا وجد باحث معامل ارتباط ٠,٢٥ بين متغيرين فهل هذا المعامل يقطع بوجود علاقة طردية بين المتغيرين ؟ حينئذ تتحول المشكلة الى مشكلة ثبات هذا المعامل التجريبي الذي نتج من البحث . وعلى الباحث أن يسأل نفسه دائما عن مدى الثقة التي يضعها في نتائجه التي يحصل عليها ، ومدى التغير المتوقع في هذه النتائج لو كرر البحث وزاد اتساعا .

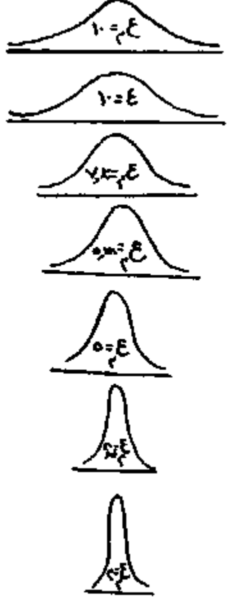
ثبـــات المتوسط الحسابي :

ولنبدأ بالوسيلة الاحصائية لحساب ثبات معامل من أهم المعاملات المستخدمة في البحوث النفسية وهو المتوسط الحسابي . ولنفرض أن الباحث كان يهدف الى حساب متوسط أعمار المتقدمين للامتحان بالجامعات المصرية وقد أخذ عينة ممثلة بأية طريقة من الطرق العلمية السابق ذكرها وحسب المتوسط الحسابي لأعمار هذه العينة فكان ٢٠ سنة ، فمن الطبيعي أن هذا المتوسط قد ينطبق أو لا ينطبق على المتوسط الحقيقي للأعمار (المتوسط الحقيقي True Mean يعرف بأنه متوسط قيم المجتمع الأصلي ، أو المتوسط المقدر من متوسطات عدد لا نهائي من العينات). الا أنه من المرجح اذا كانت العينة صحيحة ألا يبعد هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقي كثيرا ، بل ان متوسطات العينات تتذبذب حول هذا المتوسط الحقيقي ، ومن الثابت احصائيا أن التوزيع لمتوسطات هذه العينات يكون قريبا قربا كافيا من التوزيع الاعتدالي ، بل هو أقرب عادة لهذا النوع من التوزيع من قيم

الأفراد المكونة للمجتمع الأصلي . كما أن الانحراف المعياري لهذه المتوسطات يكون عادة أقل من الانحراف المعياري للقيم الأصلية (ويطلق على الانحراف المعياري للعينات اسما آخر هو « الخطأ المعياري Standard Error» ويرمز بالرمز خ م P.E.) ومن الواضح أن تشتت متوسط القيم في العينة يتوقف على عاملين هامين :

١ ــ الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي ، ذلك لأنه كلما كان الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي صغيراً تقـاربت قيمة بعضها من بعض ، وكلما تقاربت تبعا لذلك قيم العينات المختارة . بينما اذا كبر الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي زاد اتساع تباين القيم الأصلية وزاد احتمال تشتت متوسطات العينات المأخوذة .

٢ ــ عدد أفراد العينة فاذا كان عدد العينة صغيرا في كل مرة كلما توقعنا تشتتا كبيرا في قيم متوسطات العينات ، وكلما اشتملت العينة على عدد أكبر مـن الافـراد كان تشتت متوسطات العينات صغيرا ، بحيث اذا وصلنا بحجم العينة الى منتهى الصغر أو الكبر وصلنا بتشتت المتوسطات الى حده الأكبر أو الأصغر . فاذا وصل حجم العينة درجة من الصغر حتى وصلت الى فرد واحد كان الانحراف المعياري للمتوسطات هو نفس الانحراف المعياري لأفراد المجتمع الأصلي ، واذا بلغ حجم العينة درجة من الكبر حتى استغرق المجموعة كلها في عينة واحدة أصبح هناك متوسط واحد ، ومن ثم أصبح الانحراف المعياري صفرا ، حيث لا يوجد تشتت بالمرة . وفيما يلي توضيح لتطور الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي للعينة بالرسم [1] :



توزيع أفراد المجتمع الأصلي

توزيع متوسطات العينات : حجم العينة فرد واحد

توزيع متوسطات العينات : حجم العينـة فردان

توزيع متوسطات العينات : حجم العينة ٣ أفراد

توزيع متوسطات العينات : حجم العينـة ٤ أفراد

توزيع متوسطات العينات : حجم العينة ١٦ فردا

توزيع متوسطات العينات : حجم العينة ٢٥ فردا

---

(١) هذا التوضيح منقول عن : Guildford, J. P. Fundamental Statistics in Psychology and Education.

ومعنى ذلك أن الانحراف المعياري لمتوسطات العينات يتناسب طرديا مع الانحراف المعياري الحقيقي للقيم الأصلية وعكسيا مع عدد حالات كل عينة (لا عدد العينات المأخوذة من المجتمع الأصلي) .

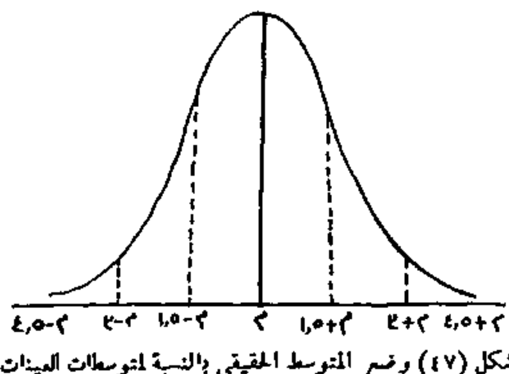
والانحراف المعياري للمتوسطات يمكن ايجاده من $ع_م = \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

حيث ع م = الانحراف المعياري للمتوسطات

حيث ع = الانحراف المعياري للقيم الأصلية .

فمثلا في الرسم التوضيحي السابق اذا كان عدد أفراد العينة ٢٥ يكون الانحراف المعياري للمتوسطات = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٥}} = ٢$

ولنعد ثانيا للبحث الذي يهدف الى معرفة متوسط أعمار المتقدمين للالتحاق بالجامعات . فقد ذكرنا أن الباحث اختار عينة محدودة من هؤلاء الطلبة وكان متوسط أعمار أفراد هذه العينة ٢٠ عاما فمن المعقول أنه لو كررنا هذا البحث على عينات أخرى لما ابتعد متوسط الأعمار عن ذلك كثيرا ، وأنه لو كرر البحث عددا من المرات فان المتوسط الحقيقي لا بد وأن ينحصر بين القيم التي نتجت من العينات المختلفة ، وطبيعي أن الباحث لا يكون عارفا بقيمة هذا المتوسط الحقيقي كما لا يكون عارفا بموضعه بالنسبة لتوزيع هذه المتوسطات ، وبما أن هذه القيم في العينات المختلفة تكون موزعة توزيعا اعتداليا كما ذكرنا فان هذا التوزيع ينطبق عليه نفس الخواص الذي ذكرت في الباب السابق ، كما تنطبق عليه نفس النسب الموضحة في جدول (٤٩) أي أن القيم المحصورة بين $م - ع_م$ و $م + ع_م$ ستحدث في ٦٨٪ من الحالات تقريبا ، فاذا كان الانحراف المعياري لهذه المتوسطات ١,٥ سنة فان هناك احتمال ٠,٦٨ أن المتوسط الحقيقي سيبعد عن المتوسط التجريبي بمقدار ١,٥ بالزيادة أو النقصان ، ويكون هناك احتمال ٠,٣٢ أن المتوسط الحقيقي يقع خارج هاتين القيمتين كما يتضح من الرسم الآتي :



شكل (٤٧) وضع المتوسط الحقيقي بالنسبة لمتوسطات العينات

كما أنه في ٩٥٪ من الحالات تنحصر قيم المتوسط بين م — ٣ — ، م + ٣ وفي ٩٩٪ من الحالات تنحصر بين م — ٤,٥ ، م + ٤,٥ تقريبا .

وعلى هذا الأساس يستطيع الباحث أن يتنبأ بالحدين اللذين يقع بينهما المتوسط الحقيقي ، فالعمر ٢٠ سنة لا شك هو احدى القيم المحتملة لمتوسط أعمار المجتمع الأصلي ، ولكن من المحتمل أن يكون المتوسط قيمة أخرى تختلف عن ذلك ، ومدى بعد أو قرب القيم الأخرى عن المتوسط التجريبي وهو ٢٠ سنة يتوقف على مدى الثقة التي يود الباحث أن يلتزمها ، فاذا قبل الباحث أن يتسامح في نسبة خطأ قدرها ٥٪ في الفرص المحتملة لجميع القيم التي يأخذها المتوسط الحقيقي فان المدى الذي يحـــدده، للمتوسط بناء على ما تقدم يكون بين ٢٠ — ١,٩٦ $ع_م$ ، ٢٠ + ١,٩٦ $ع_م$ ، واذا قبل أن يتسامح في ١٪ في الفرص فان المدى يحدده يكون ٢٠ — ٢,٥٨ $ع_م$ ، ٢٠ + ٢,٥٨ $ع_م$ ، وهكذا فانه كلما قبل الباحث نسبة أقل من الخطأ في الفرص المحتملة الحدوث حـــدد مـــدى أكثر اتساعا مؤسسا على ما يحصل عليه في البحث التجريبي المحدود بالعينة وظروف البحث .

وتبعا لهذا فان حكم الباحث على نتائجه لا يكون ما اذا كانت النتائج ثابتة يعتمد عليها أو غير ثابتة ، ولكنه يحدد عادة المدى الذي تتغير فيه النتائج التي يحصل عليها ونسبة الخطأ المحتمل في تحديد هذا المدى .

ثبات الوسيط :

يتوقف حساب ثبات الوسيط على الخطأ المعياري للقيمة الذي يحصل عليه الباحث في بحثه ويقدر الخطأ للوسيط بمقدار $\frac{٥}{٤}$ من الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي (تقريبا)

أي أن $ع_و = \frac{١,٢٥٣٣ ع}{\sqrt{ن}}$

مثال : اذا حسب الوسيط لدرجات ١٠٠ طفل أعمارهم ١٠ سنوات في اختبار المحصول اللغوي فكان ٢٥ وكان الانحراف المعياري للدرجات ٢,٥ ، فالى أي حد يمكن اعتبار قيمة هذا الوسيط ثابتة ، أي الى أي حد يمكن أن نعتبر هذه الدرجة ممثلة لدرجات الأطفال في هذا السن عموما ؟

للاجابة على ذلك تحسب الخطأ المعياري للوسيط فهو يساوي

$$= \frac{1,1533 \times 2,5}{10}$$

$$= 0,31$$

وفي حالة المنحنى الاعتدالي ٠,٩٥ من الحالات تقع بين − ١,٩٦ خطأ معياريا ، + ١,٩٦ خطأ معياريا . أي أننا نستطيع أن نقول بدرجة ٠,٩٥ من التأكد أن الوسيط الحقيقي يقع بين الوسيط التجريبي = ١,٩٦ × ٠,٣١ أي بين ٢٤,٣٩ ، ٢٥,٦١ وبدرجة ٠,٩٩ تأكد من أن الوسيط الحقيقي يقع بين الوسيط التجريبي = ٢,٥٨ × ٠,٣١ أي بين ٢٤,٢٠، ٢٥,٨٠ .

ونسبتا تأكد ٠,٩٥ ، ٠,٩٩ هما النسبتان المتخذتان عادة في البحوث التجريبية ، وعلى أساس أي نسبة من هذين عادة يرسم الباحث لنفسه الحدين اللذين تقع بينهما المعاملات في المجموعة الأصلية بناء على المعاملات التجريبية في البحث الذي يقوم به .

ثبات الانحراف المعياري :

لمعرفة درجة ثبات الانحراف المعياري نستخدم الخطأ المعياري لهذا الانحراف وهو :

$$ع_ع = \frac{ع}{\sqrt{2ن}}$$

ولتطبيق ذلك في المثال السابق نجد أن الخطأ المعياري للانحراف المعياري

$$= \frac{2,5}{\sqrt{200}}$$

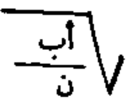
$$= 0,18$$

فالانحراف المعياري الحقيقي للمجتمع الأصلي ينحصر بين ٢,٥ – ١,٩٦ × ٠,١٨ ، ٢,٥ + ١,٩٦ × ٠,١٨ أي بين ٢,١٥ ، ٢,٨٥ بنسبة تأكد قدرها ٠,٩٥ وبين ٢,٠٤ ، ٢,٩٦ بنسبة تأكد ٠,٩٩.

ثبـات النسبـة :

كثير من نتائج البحوث توضع على صورة نسبة خاصة بدلا من متوسط أو مقياس للتشتت . فنقول مثلا أن نسبة الناجحين في اختبار ما ٨٦٪ ، أو أن الموافقين على موضوع معين هم $\frac{٣}{٤}$ العينة ويكون من المهم في هذه الحالات معرفة مدى ثبات هذه النسبة ، أي مقدار تغيرها اذا تكرر البحث على عينات أخرى كل منها تستوفي فيه شروط العينة الصالحة .

والفرض الذي يفترضه الباحث بناء على ذلك هو أن النسبة التي يحصل عليها من البحث عينة من العينات الكثيرة التي تمثل النسبة الحقيقية ، وأنه اذا أمكنه حساب الانحراف المعياري لتشتت هذه النسبة أمكن أن يصل الى حدين يفرض وقوع النسبة الحقيقية بينهما ، واضعا نسبة خاصة من نسب التأكد لهذا الافتراض والانحراف المعياري الذي يستخدمه الاحصائي في ذلك هو الانحراف المعياري للنسبة الحقيقية لا النسبة التجريبية التي تنتج من البحث وهي تساوي .



$$\sqrt{\frac{\text{أ ب}}{\text{ن}}}$$

حيث أ هي النسبة الحقيقية .

، ب هي باقي طرح هذة النسبة من الواحد الصحيح .

، ن هي عدد الحالات التي بحثت ونتجت منها النسبة الحقيقية .

وبالرغم من أن النسبة الحقيقية لا تكون معلومة لدى الباحث الا أنه لا يكون بعيدا عن الصواب اذا افترض أن النسبة التي حصل عليها من البحث قريبة قربا كافيا من النسبة الحقيقية المجهولة . والأثر الذي يحدثه هذا الافتراض صغير دائما لأن قيمة الانحراف المعياري في القانون لا تتوقف كثيرا على قيمة أ (النسبة) بقدر ما يتوقف على ن (عدد الحالات) ، لأن $\sqrt{\text{أ ب}}$ لا يتغير كثيرا عند ما تأخذ (أ) أية قيمة بين ٠,٢٠ ، ٠,٨٠ .

فاذا كانت أ = ٠,٢٠ كان $\sqrt{\text{أ ب}}$ = ٠,٤٠

واذا كانت أ = ٠,٣٠ كان $\sqrt{\text{أ ب}}$ = ٠,٤٦

واذا كانت أ = ٠,٤٠ كان $\sqrt{\text{أ ب}}$ = ٠,٤٩

واذا كانت أ = ٠,٥٠ كان $\sqrt{\text{أ ب}}$ = ٠,٥٠

وتكرر نفس القيم للمقدار $\sqrt{\text{أ ب}}$ اذا كانت قيم أ = ٠,٦٠ أو ٠,٧٠ أو ٠,٨٠ بينما يحدث تغير أكبر اذا أخذت أ القيمة ٠,٩٠ أو ٠,١٠ أو قيمة قريبة منهما، — ومن الطبيعي أنه اذا كانت النسبة صغيرة جدا أو كبيرة جدا كان هناك احتمال أكبر من قرب النسبة في العينة من النسبة في المجتمع .

والذي يساعد أيضا على صحة هذا الافتراض أن عينة النسب في العينات تكون موزعة توزيعا قريبا قربا كافيا من الاعتدالي اذا كانت(ن)كبيرة وكانت النسبة محصورة بين ٠,١٠ ، ٠,٩٠ .

واليك مثلا لتطبيق هذه القاعدة . ولنفرض أنه عمل استفتاء للطلبة عن نظام الدراسة الحالي بالجامعات ، فأخذت عينة من ١٠٠ طالب واتضح أن ٠,٦٠ من المجموعة قد وافقت على النظام وأن ٠,٤٠ منها قد عارضته فما مدى ثبات هذه النسبة ؟ أو ما مدى تغير هذه النسبة لو كرر الاستفتاء على عينات أخرى من نفس الطلبة ؟

للوصول الى ذلك نحسب الخطأ المعياري لهذه النسبة وهو يساوي :

$$\sqrt{\frac{٠,٤٠ \times ,٦٠}{١٠٠}} = ٠,٠٥$$

أي أن النسبة الحقيقية تنحصر بين ٠,٦٠ — ١,٩٦ × ٠,٠٥ ، ٠,٦٠ + ١,٩٦ × ٠,٥ بنسبة تأكد ٠,٩٥ أي بين ٠,٥٠ ، ٠,٧٠ ، عند هذه النسبة وبين ٠,٦٠ — ٢,٥٨ × ٠,٠٥ و ٦٠+٢,٥٨×٠,٠٥ عند نسبة تأكد ٠,٩٩ أي بين ٠,٤٧ ، ٠,٧٣ عند هذه النسبة

أما اذا كانت النسبة على هيئة نسبة مئوية فان الخطأ المعياري لها يكون :

$$١٠٠ \sqrt{\frac{\text{أ ب}}{\text{ن}}}$$

فادا كانت المشكلة هي نفس المشكلة السابقة وأن نسبة الموافقين هي ٦٠٪ - والمعارضين ٤٠٪ فان الخطأ المعياري لهذه النسبة يكون

$$١٠٠ \sqrt{\frac{٠,٦٠ \times ٠,٤٠}{١٠٠}} = ٥ \text{ تقريبا}$$

ويمكن وضع هذا الخطأ المعياري على صورة أخرى كالآتي :

$$\sqrt{\frac{أ (١٠٠ - أ)}{ن}}$$ وهو يساوي في هذا المثال .

$$\sqrt{\frac{٦٠ \times ٤٠}{١٠٠}} = ٥ \text{ تقريبا .}$$

ثبـــات معامـــل الارتبـــاط :

يكون معامل الارتباط الناتج في البحث كغيره من باقي المعاملات الأخرى عرضة كذلك لأخطاء العينات والقياس والصدف وغير ذلك من العوامل المؤثرة في العينات . ويهم الباحث دائما أن يقف على الحدود التي يقع بينها المعامل الحقيقي المقابل للمعامل الذي أنتجه البحث ، والطريقة لا تختلف عما أجرى في المعاملات الأخرى فهي تتوقف على معرفة الانحراف المعياري لعامل الارتباط وهو يساوي

$$\frac{١ - ر^{٢}}{\sqrt{ن - ١}}$$

فادا أجري بحث على ٥٠ شخصا وكان معامل الارتباط بين متغيرين في هذا البحث ٠.٤ كان الانحراف المعياري .

$$= \frac{١ - ٠.١٦}{\sqrt{٤٩}} = ٠.١٢$$

ومعنى هـــذا ان معامل الارتباط الحقيقي يقع بين ٠,٤ - ١,٩٦ × ٠,١٢ و ٠,٤ + ١,٩٦ × ٠.١٢ بنسبـــة تأكد ٠,٩٥ أي بين ٠,١٦ ، ٠,٦٤ وبين ٠,٤ - ٢,٥٨ × ٠,١٢ و ٠,٤ + ٢,٥٨ × ٠,١٢ أي بين ٠,٠٩ ، ٠,٧١ بنسبة تأكـــد ٠.٩٩ . ومـــن هذا يتضح أن حدود معامل الارتباط الحقيقي واسعة نسبيا ومختلفـــة

اختلافا كبيرا عن المعامل التجريبي مما يجعل معامل الارتباط ٠,٤ — المستخرج من عينة قدرها ٥٠ ضعيف الثبات .

ويختلف معامل الارتباط عن المعاملات السابقة في أن توزيعه ليس دائما توزيعا اعتداليا أو حتى متماثلا ، فالتوزيع لا يكون كذلك الا في حالات معامل الارتباط الضعيف وحيث تكون العينة كبيرة نسبيا ، أما اذا كان معامل الارتباط كبيرا حوالي ٠,٨٠ أو أكثر فان توزيع معامل الارتباط يكون ملتويا . ولذلك فان حساب الانحراف المعياري لمعامل الارتباط يكون قليل الفائدة . ولذا فقد لجأ Fisher [1] الى طريقة لتعديل معامل الارتباط الى معامل آخر رمز له بالرمز Z ومن خواص هذا المعامل أنه موزع توزيعا اعتداليا . وليس من الضروري استخدام هذا التعديل الا في حالات معاملات الارتباط العالية . فالفرق بسيط بين المعاملين في حالات المعاملات الصغيرة .

وبالمثل فان الخطأ المعياري لنسبة الارتباط η يطابق الخطأ المعياري لمعامل الارتباط فهو يساوي

$$\frac{١ - \eta^{٢}}{\sqrt{ن - ١}}$$

الخطأ المعياري لمعامل ارتباط الرتب :

وفي حالة معامل ارتباط الرتب فان الخطأ المعياري يتغير قليلا عن الوضع السابق فيصبح

$$\frac{١,٠٤ \ (١ - ر^{٢})}{\sqrt{ن - ١}}$$

ولنفرض أننا حصلنا على معامل ارتباط رتب قدره ٠,٧ بمقارنة رتب ١٧ حالة في متغيرين فان الخطأ المعياري لهذا المعامل يعادل :

$$٠,١٣ = \frac{١,٠٤ \ (١ - ٠,٤٩)}{\sqrt{١٧ - ١}}$$

ومعنى هذا أن معامل ارتباط الرتب الحقيقي ينحصر بين ٠,٧ — ١,٩٦×٠,١٣ و ٠,٧ + ١,٩٦×٠,١٣ بنسبة تأكد ٠,٩٥ أي بين ٠,٤٥ ، ٠,٩٥ ، وأما في حالة نسبة تأكد ٠,٩٩ فان المعامل يحتمل أن يصل إلى ٠,٧٠ + ٢,٥٨ × ٠,١٣ ومعنى هذا

(١) Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers.

أن هذه النسبة تعطي معاملا للارتباط يحتمل وصوله الى قيمة تعادل أو تزيد قليلا عن الواحد الصحيح وهذا غير معقول .

ثبات معامل الارتباط الثنائي :

يختلف الخطأ المعياري لمعامل الارتباط الثنائي عن الصورة السابقة فهو يعادل :

$$\frac{\sqrt{\frac{أ\,ب}{ص} - ر^{٢}}}{\sqrt{ن}}$$

حيث أ = نسبة الحالات في المجموعة العليا .

، ب = نسبة الحالات في المجموعة السفلى .

، ر = معامل الارتباط الثنائي .

، ن = عدد الحالات .

ولنختبر المعامل الذي حصلنا عليه في المثال نجد أن معامل الارتباط الثنائي الذي حصلنا عليه هو ٠,١٦

وكانت أ = ٠,٥٩ ، ب = ٠,٤١ ، ن = ٢٢٠

وكانت ص عند نقطة التقسيم = ٠,٣٩

وبناء على ذلك فان الخطأ المحتمل لهذا المعامل :

$$= \frac{\frac{,٥٩ \times ,٤١}{,٣٩} - (,١٦)^{٢}}{\sqrt{٢٢٠}} = ٠,٠٤$$

ومعنى هذا أنه عند نسبة تأكد ٠,٩٥ ينحصر المعامل الثنائي الحقيقي بين ٠,١٦ — ١,٩٦ × ٠,٠٤ ، ٠,١٦ + ١,٩٦ × ٠,٠٤ وعند نسبة تأكد ٠,٩٩ ينحصر المعامل بين ٠,١٦ — ٢,٥٨ × ٠,٠٤ ، ٠,١٦ × ٢,٥٨ × ٠,٠٤ أي بين ٠,٠٨ ، ٠,٢٤ عند النسبة الأولى وبين ٠,٠٦ ، ٠,٢٦ عند النسبة الثانية .

دلالة الفروق والفرض الصفري :

ان دلالة الفروق أهم بكثير من الناحية التجريبية العملية من البحث عن مدى ثبات المقاييس الفردية . ذلك لأن أغلب البحوث التجريبية تهدف الى المقارنة والمقاييس النسبية أكثر مما تهدف الى مجرد القياس أو القيم المطلقة وحتى في حالات القياس العادية يلجأ الباحث الى مقارنة نتائجه — سواء كانت هذه المقارنة صريحة — أو ضمنية بمعيار خاص ليقف على مدى قرب القيمة التي حصل عليها من قياسه أو تقديره من المعيار المألوف في هذه الناحية ، بل وزيادة على ذلك فان أغلب البحوث التجريبية سواء في الميادين النفسية أو التربوية أو الاجتماعية تحتاج من الباحث أن يجري البحث على مجموعتين احداهما ضابطة والأخرى تجريبية وتستلزم المقارنة بين نتائج المجموعتين .

ومن هنا كان من المهم أن نعرف الانحراف المعياري للفرق بين متغيرين اذا عرف الانحراف المعياري لكل منهما . فاذا فرضنا أن الانحراف المعياري لأحد المتغيرين هو $ع_1$ وأن الانحراف المعياري للمتغير الآخر هو $ع_2$.

فان الانحراف المعياري للفرق بين المتغيرين= $\sqrt{ع_1^2 + ع_2^2}$ أي يعادل الجذر التربيعي لمجموع تباينهما على شرط أن يكون المتغيران غير مرتبطين بأية علاقة عددية ، أي أن معامل الارتباط بينهما صفر . فاذا كانت هناك علاقة عددية بين المتغيرين وليكن معامل الارتباط بينهما $ر_{21}$ مثلا فان الانحراف المعياري للفرق بين المتغيرين :

$$= \sqrt{ع_1^2 + ع_2^2 - 2 ع_1 ع_2 ر_{21}}$$

واذا طبقنا هذا على المتوسط الحسابي لمتغيرين فان المشكلة تصبح اختبارا لفرض محدد ، هل هناك فرق جوهري بين متوسطي المتغيرين ؟ ويمكن وضع هذا الفرض على صورة يطلق عليها اسم « الفرض الصفري (Null Hypothesis) فيفترض الباحث أنه « ليس بين متوسطي المتغيرين أي فرق له دلالة » أو بمعنى آخر أن الفرق بين المتوسطين في المجتمع الأصلي يعادل صفرا » .

وفي هذه الحالة يوجد الباحث الفرق بين متوسطي المتغيرين في البحث الذي يجريه ثم يقارن هذا الفرق بالخطأ المعياري للفرق نفسه .

النسبـة الحرجـة :

وتستخدم لهذه المقارنة نسبة خاصة يطلق عليها النسبة الحرجة Critical Ratio (C.R.) وهي تساوي خارج قسمة الفرق بين المتوسطين على الانحراف المعياري (أو الخطأ المعياري) لهذا الفرق .

ويوصف الفرق التجريبي الذي ينبيء بفرق في المجتمع الأصلي بأنه فرق ذو دلالة احصائية Significant difference . ومن الطبيعي أن يقرن الوصف بنسبة تأكد خاصة كما سبق ذكره في ثبات المقاييس السابقة فنقول مثلا أن الفرق ذو دلالة عند نسبة ٠.٠٥ ، وعند نسبة ٠,٠١ أي أن هناك احتمال ٥٪ أو ١٪ خطأ في صحة هذا الاحتمال ومن الطبيعي أن الباحث الذي يختار نسبة ٠,٠١ يستلزم فرقا أعلى بين متوسطي المتغيرين .

فاذا فرضنا أن المتوسط الحسابي لأحد المتغيرين هو $م_١$. أن المتوسط الحسابي للمتغير الثاني هو $م_٢$ وأن الانحراف المعياري للمتغير الأول $ع_١$ والمتغير الثاني $ع_٢$ وأن عدد حالات المتغيرين هو $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب كان الانحراف المعياري للمتوسط الأول

$$= \frac{ع_١}{\sqrt{ن_١}}$$

وكان الانحراف المعياري للمتوسط الثاني $= \frac{ع_٢}{\sqrt{ن_٢}}$

وكان الانحراف المعياري للفرق بين المتوسطين $ع_{م_١ - م_٢}$

$$= \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

وكانت النسبة الحرجة (ن . ح) $= \dfrac{م_١ - م_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}}$

واليك مثالا لطريقة تطبيق هذه النسبة :

طبق اختبار المحصول اللغوي على مجموعتين متجانستين (متعادلتين تقريبا من النواحي الأخرى)من البنين والبنات وكانت نتيجة الاختبار كما هو مبين في الجدول التكراري الآتي :

فئـــات الدرجات	تكرار البنين	تكرار البنات
صفر –	٥	٣
٢ –	١٨	٧
٤ –	٢٣	١٥
٦ –	٣٥	١٨
٨ –	٤٠	٢٢
١٠ –	٣٢	٢٥
١٢ –	٣٠	٣٥
١٤ –	٢٥	٢٧
١٦ –	٢٠	١٦
١٨ –	١٢	١٤
٢٠ –	٥	١١
٢٢ –	٥	٧
المجموع	٢٥٠	٢٠٠

جدول(٧٩) نتيجة مجموعة من البنين واخرى من البنات في اختبار المحصول اللغوي

فاذا طلب بعد ذلك معرفة أي الجنسين أكثر تفوقا في نتائج هذا الاختبار فيمكن أن نحول هذا السؤال على صورة فرض صفري وهو « أنه لا فرق بين الجنسين في هذه الناحية » ولاختبار هذا الفرض علينا أن نوجد متوسط درجات الفئتين والانحراف المعياري لهمـــا .

فئات الدرجات	تكرار البنين	ح	ك ح	ك ح²	تكرار البنات	ك ح	ك ح²
صفر –	٥	٥	–٢٥	١٢٥	٣	–١٥	٧٥
٢ –	١٨	–٤	–٧٢	٢٨٨	٧	–٢٨	١١٢
٤ –	٢٣	–٣	–٦٩	٢٠٧	١٥	–٤٥	١٣٥
٦ –	٣٥	–٢	–٧٠	١٤٠	١٨	–٣٦	٧٢
٨ –	٤٠	–١	–٤٠	٤٠	٢٢	–٢٢	٢٢
١٠ –	٣٢	صفر	–	–	٢٥		–
١٢ –	٣٠	١	٣٠	٣٠	٣٥	٣٥	٣٥
١٤ –	٢٥	٢	٥٠	١٠٠	٢٧	٥٤	١٠٨
١٦ –	٢٠	٣	٦٠	١٨٠	١٦	٤٨	١٤٤
١٨ –	١٢	٤	٤٨	١٩٢	١٤	٥٦	٢٢٤
٢٠ –	٥	٥	٢٥	١٢٥	١١	٥٥	٢٧٥
١٢ –	٥	٦	٣٠	١٨٠	٧	٤٢	٢٥٢
			٢٤٣	١٦٠٧	٢٠٠	٢٩٠	١٤٥٤
المجموع	٢٥٠		٢٧٦			١٤٦٠	

جدول (٨٠) حساب المتوسط والانحراف المعياري لدرجات المجموعتين .

٨٠

اذا رمزنا لمجموعة البنين بالرقم « ١ » ولمجموعة البنات بالرقم « ٢ » .

فان $م_١ = ١١ - \frac{٢٣}{٢٥٠} \times ٢ = ١٠.٧٤$

$ع_١ = ٢ \sqrt{\frac{١٦٠٧}{٢٥٠} - \left(\frac{٢٣}{٢٥٠}\right)^٢} = ٥,٠٧$

$م_٢ = ١١ + \frac{١٤٤}{٢٠٠} \times ٢ = ١٢,٤٤$

$ع_٢ = ٢ \sqrt{\frac{١٤٥٤}{٢٠٠} - \left(\frac{١٤٤}{٢٠٠}\right)} = ٥,٢٠$

ويتضح لأول وهلة أن مجموعة البنات متفوقة عن مجموعة البنين في هذا الاختبار ، فمتوسط الدرجات في هذه المجموعة أعلى منه في مجموعة البنين . ولكن الباحث ينبغي

أن يختبر مدى دلالة هذا الفرق ، أي يختبر دلالة الفرض بأن البنات يتفوقن على البنين في هذه الناحية بوجه عام . والطريقة الشائعة كما ذكرنا هي حساب النسبة الحرجة كما يأتي :

$$ق ح = \frac{م_٢ - م_١}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}}$$

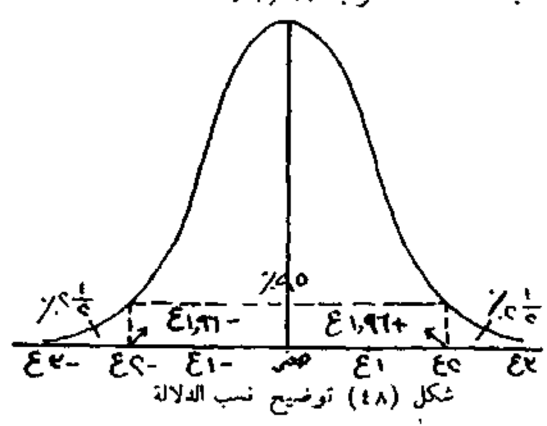
والفرق بين $م_١$ ، $م_٢$ لا تهم فيه الاشارة ذلك لأن اعتبار احدى المجموعتين ١ أو ٢ يتوقف على المجرب نفسه ، ولذا فسوف لا تهتم باشارة الفرق في الخطوات الآتية :

$$ق ح = \frac{١٢,٤٤ - ١٠,٧٤}{\sqrt{\frac{٢٥,٦٤}{٢٥٠} + \frac{٢٧,٠١}{٢٠٠}}}$$

$$= \frac{١,٧٠}{\sqrt{٠,٢٢٨}} = ٣,٤٧$$

مقاييس الدلالة :

واذا رجعنا الى جدول (٥٥) للمنحنى الاعتدالي لمعرفة الدرجة المعيارية المقابلة للمساحة الصغرى ٢,٥٪ أي عندما يكون مجموع المساحتين عند طرفي المنحنى ٠,٠٥ نجد أن هذه الدرجة ١,٩٦ وعند المساحة الصغرى ٥ ,٪ أي عندما يكون مجموع المساحتين عند طرفي المنحنى ٠,٠١ نجد أن هذه الدرجة ٢,٥٨ .



شكل (٤٨) توضيح نسب الدلالة

فاذا بلغت النسبة الحرجة ١.٩٦ قيل أن الفرق له دلالة عند نسبة ٠,٠٥ واذا بلغت ٢.٥٨ قيل أن له عند نسبة ٠,٠١ .

وتفسير ذلك أنه لنفرض أن الفرق الذي وجد بالتجربة غير حقيقي وأنه نتج بسبب ظروف تجريبية ليس الا ، وأن الفرق بين المتوسطين صفر فانه من المعلوم نظريا أن الفروق بين متوسطات العينات المختلفة تكون موزعة توزيعا اعتداليا ، ما دام عدد الأفراد في كل عينة كبيرا .

ففي هذا المثال قد وجدنا أن الفرق التجريبي يقع من هذا التوزيع خارج الحدود التي تحجز ٩٥٪ من المنحنى ويقع أيضا خارج ٩٩٪ من مساحة المنحنى ، مما يرجح ترجيحا كبيرا أن الفرق التجريبي لا يمكن أن يكون ناتجا عن الصدفة أو ظروف التجربة فقط . ونسبة ٩٥ ٪ أو ٩٩٪ أوما شابهها هي نسبة اعتبارية يضعها المجرب لنفسه دون تقيد بنسبة خاصة . ولكن من المتبع في البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية أن يعتبر الفرق الذي يخرج عن حدود ٩٥٪ من مساحة المنحنى ذا دلالة احصائية ، وأن الذي يخرج عن حدود ٩٩٪ من مساحة المنحنى ذو دلالة احصائية كبيرة . وأما الذي يدخل ضمن حدود ٩٥٪ من مساحة المنحنى فيوصف بأنه ليس له دلالة احصائية .

وتستعمل الرموز الآتية عادة في الانجليزية لهذه الاصطلاحات :

ليس له دلالة احصائية	= N.S
له دلالة احصائية (عند ٠,٠٥ فقط)	= S*
له دلالة احصائية كبيرة (عند ٠,٠١)	= S**

ويقصد بأن الفرق له دلالة احصائية عند ٠,٠٥ أنه يقع في طرف المنحنى الذي يحجز داخله ٩٥٪ من المنحنى على اعتبار أن النسبة الحرجة من كل طرف هي ٢,٥٪ ويفهم عادة من التعبير .(ذودلالة احصائية عند ٠,٠٥ فقط)، أن الفرق ليس له دلالة جوهرية عند نسبة ٠,٠١ ويقتنع كثير من الباحثين بنسبة ٠,٠٥ فقط ومن الطبيعي أن الفرق ذا الدلالة عند ٠,٠١ لا بد أن يكون ذا دلالة أيضا عند ٥٪ فالنقطة في المساحة الخارجية عندما تكون المساحة الداخلية ٠,٩٩ من مساحة المنحنى لا بد وأن تكون خارجة أيضا بالنسبة للمساحة الداخلية ٩٥٪ .

وبناء على هذا نستطيع أن نرجح أن الفرق الحالي في المثال انما هو فرق جوهري ذو دلالة حتّى عند نسبة ١٪ مما يرجح البنات بوجه عام على البنين في هذا الاختبار

استخدام الفرض الصفري في حساب ثبات معامل الارتباط :

ذكرنا عند الكلام عن ثبات معامل الارتباط أن الصعوبة التي تصادف الاحصائي هي أن توريع هذا المعامل ليس اعتداليا وخصوصا عند القيم الكبيرة . وأن فيشر تغلب على هذه الصعوبة باستخدام معامل، Z ، ولكن بعض الاحصائيين يميلون الى اختبار معامل الارتباط على ضوء الفرض الصفري ، وذلك بفحص معامل الارتباط الذي يحصل عليه ازاء الفرض بأنه في المجتمع الأصلي لا توجد علاقة ما بين المتغيرين . أي ازاء افتراض أن معامل الارتباط صفر . فيحسبون الانحراف المعياري عندما يكون المعامل صفراً، فاذا بلغ المعامل الارتباط ١,٩٦ من هذا الانحراف قيل أن المعامل له دلالة احصائية عند ٠,٠٥ واذا بلغ ٢,٥٨ من الانحراف قيل أنه ذو دلالة عند ٠,٠١ .

والانحراف المعياري لمعامل ارتباط صفر $= \dfrac{١}{\sqrt{ن - ١}}$

ولذلك فان النسبة الحرجة (ن . ح) $= \dfrac{ر}{\dfrac{١}{\sqrt{ن - ١}}}$

$= ر \sqrt{ن - ١}$

ففي حالة معامل ارتباط قدره ٠,٤٠ عندما كانت العينة عددها ٥٠

تكون ن . ح $= ٠,٤ \sqrt{٤٩} = ٢,٨$

وهذه النسبة ذات دلالة عند نسبتي ٠,٠٥ ، ٠,٠١

هذا وهناك طريقة أخرى لقياس مدى ثبات معامل الارتباط نذكرها عند الكلام عن اختبار « ت » .

اختبار « ت »

ذكرنا سابقا أن الاحصائيين يميلون الى التفريق بين الخطأ المعياري للعينة الصغيرة [1]

(١) يميل كثير من الاحصائيين إلى اعتبار أن العينة الصغيرة ما يقل عدد أفرادها عن ٥٠ .

والانحراف المعياري للمجتمع الأصلي ، ومن الممكن اثباته نظريا أن الانحراف المعياري للمجتمع يختلف حسابيا عن الخطأ المعياري للعينة فقيمة الأولى عادة أكبر من الثاني .

ولتصحيح هذا الخطأ التجريبي يضرب الانحراف المعياري للعينة في المعامل $\sqrt{\frac{ن}{ن - ١}}$

وبذلك يصبح الخطأ المحتمل للعينة = $\sqrt{\frac{مح^{٢}}{ن - ١}}$ بدلا من $\sqrt{\frac{مح}{ن}}$ وهذا التعديل يكون عديم القيمة في حالة العينات الكبيرة ، حيث تتعادل $\sqrt{ن}$ مع $\sqrt{ن - ١}$ تقريبا. ولكن من المستحسن دائما استخدام هذا التعديل ما دام المعامل قد حسب من العينة وليس من المجتمع . واذا طبقنا ذلك على الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي في حالة العينات الصغيرة ، وجدنا أن

المقدار : $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$ قد تحول الى $\frac{ع}{\sqrt{ن - ١}}$

ومما تجدر ملاحظته كذلك أنه في حالة العينات الصغيرة لا تتبع المتوسطات توزيعا اعتداليا كما كان الحال في العينات الكبيرة ، بل يختلف التوزيع قليلا عن هذا النمط فيصبح أكثر ارتفاعا قرب الطرفين ، وبذا تصبح النسب الاحتمالية عند الطرفين أكثر منها قليلا في المنحنى الاعتدالي العادي وقد بحث Student هذا التوزيع الجديد وأعطى فشر[1] Fisher جدولا للنسب الاحتمالية المختلفة وفي هذا الجدول نجد اصطلاحا جديدا :

هي درجات الحرية Degrees of Freedom ودرجات الحرية في أية مجموعة هي عدد الحالات في المجموعة ناقصا واحد (وتفسير ذلك أنه ما دام مجموع قيم المجموعة محددا وليكن عدد أفراد المجموعة خمسة فاننا نستطيع ان نصنع لهذه المجموعة أية أربع قيم بطريق الصدفة أما الخامس فيجب أن يقيد بقيمة تجعل المجموع معادلا للمجموع الأصلي ، أي أنه اذا كان عدد أفراد المجموعة ن فان درجات الحرية لهذه المجموعة هي ن — ١) .

والجدول الآتي هو جدول لنسب الاحتمالات في التوزيع الجديد وقد أطلق عليه توزيع (t) وترمز له بالعربية بالرمز (ت) وبهذا يصلح توزيع « ت » لأن يتخذ مقياسا للدلالة سواء كان ذلك في العينات الصغيرة أم الكبيرة .

---

(١) Fisher R. A. Statistical Methods for Researches Workers.

نسب الاحتمالات

درجات الحرية (ن – ١)	٠,٥٠	٠,١٠	,٠٥	,٠٢	٠,٠١
١	ت=١,٠٠٠	ت= ٦,٣٤	ت = ١٢,٧١	ت = ٣١,٨٢	ت = ٦٣,٦٦
٢	٠,٨١٦	٢,٩٢	٤,٣٠	٨,٩٦	٩,٩٢
٣	٠,٧٦٥	٢,٣٥	٣,١٨	٤,٥٤	٥,٨٤
٤	٠,٧٤١	٢,١٣	٢,٧٨	٣,٧٥	٤,٦٠
٥	٠,٧٢٧	٢,٠٢	٢,٥٧	٣,٣٦	٤,٠٣
٦	٠,٧١٨	١,٩٩٤	٢,٤٥	٣,١٤	٣,٧١
٧	٠,٧١١	١,٩٠	٢,٣٦	٣,٠٠	٣,٥٠
٨	٠,٧٠٦	١,٨٦	٢,٣١	٢,٩٠	٣,٢٦
٩	٠,٧٠٣	١,٨٣	٢,٢٦	٢,٨٢	٣,٢٥
١٠	٠,٧٠٠	١,٨١	٢,٢٣	٢,٧٦	٣,١٧
١١	٠,٦٩٧	١,٨٠	٢,٢٠	٢,٧٢	٣,١١
١٢	٠,٦٩٥	١,٧٨	٢,١٨	٢,٦٨	٣,٠٦
١٣	٠,٦٩٤	١,٧٧	٢,١٦	٢,٦٥	٣,٠١
١٤	٠,٦٩٢	١,٧٦	٢,١٤	٢,٦٢	٢,٩١
١٥	,٦٩١	١,٧٥	٢,١٣	٢,٦٠	٢,٩٥
١٦	٠,٦٩٠	١,٧٥	٢,١٢	٢,٥٨	٢,٩٢
١٧	٠,٦١٩	١,٧٤	٢,١١	٢,٥٧	٢,٩٠
١٨	٠,٦٨١	١,٧٣	٢,١٠	٢,٥٥	٢,٨٨
١٩	٠,٦٨٨	١,٧٣	٢,٠٩	٢,٥٤	٢,٨٦
٢٠	٠,٦٨٧	١,٧٢	٢,٠٩	٢,٥٣	٢,٨٤
٢١	٠,٦٨٦	١,٧٢	٢,٠٨	٢,٥٢	٢,٨٣
٢٢	٠,٦٨٦	١,٧٢	٢,٠٧	٢,٥١	٢,٨٢

٢٣	,٦٨٥	١,٧١	٢ ٠٧	٢ ٠٧	٢.٨١
٢٤	,٦٨٥	١,٧١	٢.٠٦	٢.٤٩	٢,٨٠
٢٥	,٦٨٤	١.٧١	٢.٠٦	٢.٤٨	٢.٧٩
٢٦	,٦٨٤	١,٧١	٢.٠٦	٣.٤٨	٢,٧٨
٢٧	,٦٨٤	١,٧٠	٢,٠٥	٢,٤٧	٢,٧٧
٢٨	,٦٨٤	١,٧٠	٢,٠٥	٢,٤٧	٢,٧٦
٢٩	,٦٨٣	١,٧٠	٢,٠٤	٢,٤٦	٢.٧٦
٣٠	,٦٨٣	١,٧٠	٢,٠٤	٢.٤٦	٢.٧٥
٣٥	,٦٨٢	١,٦٩	٢,٠٣	٢,٤٤	٢,٧٢
٤٠	,٦٨١	١,٦٨	٢,٠٢	٢.٤٢	٢.٧١
٤٥	,٦٨٠	١,٦٨	٢.٠٢	٢,٤١	٢.٦٩
٥٠	,٦٧٨	١,٦٨	٢,٠١	٢,٤٠	٢,٦٨
٦٠	,٦٧٨	١,٦٧	٢,٠٠	٢,٣٩	٢.٦٦
٧٠	,٦٧٨	١,٦٧	٢,٠٠	٢,٣٨	٢,٦٥
٨٠	,٦٧٧	١,٦٦	١,٩٩	٢,٣٨	٢,٦٤
٩٠	,٦٧٧	١,٦٦	١,٩٩	٢,٣٧	٢,٦٣
١٠٠	,٦٧٧	١,٦٦	١,٩٨	٢,٣٦	٢,٦٣
١٢٥	,٦٧٦	١,٦٦	١,٩٨	٢,٣٦	٢,٦٢
١٥٠	,٦٧٦	١,٦٦	١,٩٨	٢,٣٥	٢,٦١
٢٠٠	,٦٧٥	١,٦٥	١,٩٧	٢,٣٥	٢,٦٠
٣٠٠	,٦٧٥	١,٦٥	١,٩٧	٢,٣٤	٢,٥٩
٤٠٠	,٦٧٥	١,٦٥	١,٩٧	٢,٣٤	٢,٥٩
٥٠٠	,٦٧٤	١,٦٥	١,٩٦	٢,٣٣	٢,٥٩
١٠٠٠	,٦٧٤	١,٦٥	١,٩٦	٢,٣٣	٢,٥٨
	,٦٧٤	١,٦٥	١,٩٦	٢,٣٣	٢.٥٨

جدول (٨١) قيم (ت) عند نسب الاحتمال المختلفة

ولاستخدام « ت » كاختبار لقياس مدى دلالة الفرق بين متوسطي عينتين يستخدم القانون الآتي (هذا ويستحسن استخدام هذا القانون مهما كان حجم العينة) .

$$\text{ت} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{\sqrt{\frac{\text{ن}_1 \text{ع}_1^2 + \text{ن}_2 \text{ع}_2^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 2} \left(\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}\right)}}$$

حيث م_1 = متوسط قيم العينة الأولى .

حيث م_2 = متوسط قيم العينة الثانية .

حيث ن_1 = عدد أفراد العينة الأولى .

حيث ن_2 = عدد أفراد العينة الثانية .

حيث ع_1 = الانحراف المعياري للعينة الأولى .

حيث ع_2 = الانحراف المعياري للعينة الثانية .

وبعد ايجاد قيمة (ت) للبيانات السابقة نحسب درجات الحرية وهي في حالة الفرق بين متوسط عينتين = $\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 2$ (درجات الحرية للعينة الأولى $\text{ن}_1 - 1$ ، درجات الحرية للعينة الثانية $\text{ن}_2 - 1$ ومجموعهما $\text{ن}_1 - \text{ن}_2 - 2$) .

والخطوة التالية هي استخدام الجدول السابق فنبحث عن (ت) في صف درجات الحرية الخاصة بالبحث عند نسبة ٠,٠٥ (العامود الرابع) فان كانت قيمة (ت) في البحث تعادل أو أكبر من الموجودة في الجدول دل ذلك على أن الفرق بين المتوسطين له دلالة احصائية عند نسبة ٠,٠٥ ، وفي هذه الحالة نبحث عند نسبة ٠,٠١ (العامود الأخير) لتحديد ما اذا كان الفرق له دلالة احصائية عند نسبة ٠,٠١ أيضا .

لنعد الى المثال بجدول (٨٢) حيث :

م_1 = ١٠,٧٤ .

م_2 = ١٢,٤٤ .

ع_1 = ٥,٠٧ .

ع_2 = ٥,٢٠ .

ن_1 = ٢٥٠ .

ن_2 = ٢٠٠ .

في هذا المثال تكون درجات الحرية (د . ح) = ٢٥٠ + ٢٠٠ − ٢ = ٤٤٨

$$ت = \frac{١٠,٧٤ - ١٢,٤٤}{\sqrt{\frac{٢٥٠\ (٥,٠٧)^{٢} + ٢٠٠\ (٥,٢٠)^{٢}}{٢٥٠ + ٢٠٠ - ٢} \left(\frac{١}{٢٥٠} + \frac{١}{٢٠٠}\right)}}$$

ونكرر هنا أن اشارة $م_{١} - م_{٢}$ لا تهم في حساب (ت) لأن اختبار (ت) يوضح ما اذا كان الفرق له دلالة مهما كانت الاشارات

$$ت = \frac{١,٧٠}{\sqrt{\frac{٢٥٠ \times ٢٥,٦٨ + ٢٠٠ \times ٢٧}{٤٤٨} \left(\frac{١}{٢٥٠} + \frac{١}{٢٠٠}\right)}}$$

وبالكشف في جدول (ت) عند درجة حرية ٤٤٨ نجد أن قيمة (ت) عند نسبة ٠,٠٥ = ١,٩٧ وعند نسبة ٠,٠١ = ٢,٥٩ .

ومعنى هذا أن الفرق التجريبي له دلالة عند النسبتين .

واذا كان عدد الحالات في المجموعتين واحدا فان صورة قانون (ت) تصبح أكثر اختصارا حيث تصير :

$$ت = \frac{م_{١} - م_{٢}}{\sqrt{\frac{ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢}}{ن - ١}}}$$

يلاحظ أن هذه نفس النسبة الحرجة مع اختلاف واحد ، وهو وضع ن − ١ بدلا من ن .

استخدام اختبار « ت » في مقياس ثبات معامل الارتباط :

ذكرنا فيما سبق أن هناك طريقتين لحساب مدى ثبات معامل الارتباط وهما :

١ ــ مقارنة المعامل بانحرافه المعياري حيث $ع = \frac{١ - ر^٢}{\sqrt{ن - ١}}$

٢ ــ مقارنة المعامل بالانحراف المعياري لمعامل ارتباط صفري ، أي فحص صحة الفرض بأن المعامل الارتباط الحقيقي هو صفر حيث :

$$ع_{ر\,صفر} = \frac{١}{\sqrt{ن - ١}}$$

وذكرنا أن عيوب طريقة مقارنة معامل الارتباط بانحرافه المعياري تنحصر في أن توزيع معامل الارتباط ليس اعتداليا . ولهذا اقترح فيشر معاملا جديدا هو Z.

ونضيف هنا طريقة أدق من سابقتها ، وتنحصر هذه الطريقة في افتراض أن معامل الارتباط الحقيقي هو صفر ومقارنة قيمة « ت » لمعامل الارتباط التجريبي بما يتوقع لها عند نسبتي ٠,٠٥ ، ٠,٠١ وتحسب « ت » من القانون :

$$ت = \frac{ر \sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^٢}}$$

ر = معامل الارتباط الناتج في البحث

، ن = عدد الحالات .

فبعد حساب « ت » بهذه الطريقة يرجع الى جدول قيم « ت » : وتكون درجات الحرية في هذه الحالة ن ــ ٢ . فاذا كانت (ت) الناتجة أكبر من الموجودة في الجدول عند نسبة ٠,٠٥ وصف معامل الارتباط التجريبي بأنه ذو دلالة عند هذه النسبة ، وفي هذه الحالة يبحث عن قيمة « ت » عند نسبة ٠,٠١ لمعرفة ما اذا كانت القيمة الناتجة ذات دلالة عند هذه النسبة أيضا .

وعلى سبيل المثال نبحث عن دلالة معامل الارتباط ٠,٤ الناتج عن عينة عدد أفرادها ٥٠

$$ت = \frac{٠,٤ \sqrt{٤٨}}{\sqrt{١ - (٠,٤)^{٢}}}$$

$$= ٣,٠١$$

بالرجوع الى جدول « ت » نجد أنها تساوي ٢,٠١ (د . ح = ٤٨) عند نسبة ٠,٠٥ وتساوي ٢,٦٨ عند نسبة ٠,٠١ ، وهذا يدل على أن معامل الارتباط ٠,٤ ذو دلالة احصائية عند النسبتين .

وزيادة في سهولة هذه الطريقة يعطينا جاريت Garrett [1] جدولا يشتمل على قيم معامل الارتباط التي تكون ذات دلالة عند نسبتي ٠,٠٥ و ٠,٠١ اذا عرفت درجات الحرية . واليك فيما يلي هذا الجدول :

درجات الحرية	٠,٠٥	٠,٠١	درجات الحرية	٠,٠٥	٠,٠١
١	٠,٩٩٧	١,٠٠٠	٢٤	٠,٣٨٨	٠,٤٩٦
٢	٠,٩٥٠	٠,٩٩٠	٢٥	٠,٣٨١	٠,٤٨٧
٣	٠,٨٧٨	٠,٩٥٩	٢٦	٠,٣٧٤	٠,٤٧٨
٤	٠,٨١١	٠,٩١٧	٢٧	٠,٣٦٧	٠,٤٧٠
٥	٠,٧٥٤	٠,٨٧٤	٢٨	٠,٣٦١	٠,٤٦٣
٦	٠,٧٠٧	٠,٨٣٤	٢٩	٠,٣٥٥	٠,٤٥٦
٧	٠,٦٦٦	٠,٧٩٨	٣٠	٠,٣٤٩	٠,٤٤٩
٨	٠,٦٣٢	٠,٧٦٥	٣٥	٠,٣٢٥	٠,٤١٨
٩	٠,٦٠٢	٠,٧٣٥	٤٠	٠,٣٠٤	٠,٣٩٣
١٠	٠,٥٧٦	٠,٧٠٨	٤٥	٠,٢٨٨	٠,٣٧٢
١١	٠,٥٥٣	٠,٦٨٤	٥٠	٠,٢٧٣	٠,٣٥٤
١٢	٠,٥٣٢	٠,٦٦١	٦٠	٠,٢٥٠	٠,٣٢٥
١٣	٠,٥٠٤	٠,٦٤١	٧٠	٠,٢٣٢	٠,٣٠٢
١٤	٠,٤٩٧	٠,٦٢٣	٨٠	٠,٢١٧	٠,٢٨٣
١٥	٠,٤٨٢	٠,٦٠٦	٩٠	٠,٢٠٥	٠,٢٦٧
١٦	٠,٤٦٨	٠,٥٩٠	١٠٠	٠,١٩٥	٠,٢٥٤
١٧	٠,٤٥٦	٠,٥٧٥	١٢٥	٠,١٧٤	٠,٢٢٨
١٨	٠,٤٤٤	٠,٥٦١	١٥٠	٠,١٥٩	٠,٢٠٨
١٩	٠,٤٣٣	٠,٥٤٩	٢٠٠	٠,١٣٨	٠,١٨١
٢٠	٠,٤٢٣	٠,٥٢٧	٣٠٠	٠,١١٣	٠,١٤٨
٢١	٠,٤١٣	٠,٥٢٦	٤٠٠	٠,٠٩٨	٠,١٢٨
٢٢	٠,٤٠٤	٠,٥١٥	٥٠٠	٠,٠٨٨	٠,١١٥
٢٣	٠,٢٩٦	٠,٥٠٥	١٠٠٠	٠,٠٦٢	٠,٠٨١

جدول (٨٢) معاملات الارتباط ذات الدلالة عند درجات الحرية المختلفة

(١) Garrett, H.E. Statistics in Psychology and Education.

ولتوضيح استخدام هذا الجدول نقدم الأمثلة الآتية :

عدد الحالات	درجات الحرية	معامل الارتباط	التفسير
٢٠	١٨	٠,٥٠٠	له دلالة عند ٠,٠٥ وليس له دلالة عند ٠,٠١
٥٠	٤٨	٠,٦٢٥	له دلالة عند كل من ٠,٠٥و ٠,٠١
١٠٠	٩٨	٠,٧٥٠	ليس له دلالة عند كل من ٠,٠٥ و ٠,٠١

اختبار كا^{٢} :

ومن أهم الاختبارات المستخدمة لفحص الفرض الصفري اختبار كا ٢ ، وهو يستخدم بنوع خاص في اختبار مدى دلالة الفرق بين تكرار حصل عليه الباحث وتكرار مؤسس على الفرض الصفري . فاذا قسمنا عددا من أطفال فرقة دراسية حسب اختبار للذكاء الى مجموعتين : احداهما متفوقة وأخرى ضعيفة ثم لاحظنا في نهاية العام الدراسي نجاح ورسوب أفراد المجموعتين فكانت النتيجة كما يلي :

ذكاء / تحصل	ممتـــاز	ضعيف	المجموع
ناجـــح	٤٠	١٠	٥٠
راسب	٢٠	٣٠	٥٠
المجموع	٦٠	٤٠	١٠٠

جدول (٨٣) العلاقة بين الذكاء والتحصيل

أي أن مجموعة الأطفال عددها١٠٠طفل٦٠منهم ممتازون من حيث الذكاء و ٤٠ أقل من المستوى العادي ، واتضح في نهاية العام أن ٤٠ من ممتازي الذكاء قد نجحوا في الامتحان التحصيلي ورسب ٢٠ منهم ، بينما نجح ١٠ من الضعاف ورسب ٣٠ . فانه يطلب مقارنة هذه النتيجة بما كان يتوقع لها لو أن أثر مستوى الذكاء في نتيجة التحصيـــل منعـــدم .

لتحقيق هذا الغرض تنشىء جدولا آخر يحتوي على تكرارات فرضية مؤسسة على افتراض أن الذكاء لا أثر له في التحصيل . في مثل هذه الحالة يكون عدد الناجحين معادلا لعدد الراسبين في كل من فئتي الذكاء ، أي يصير الجدول التكراري النظري على أساس الفرض الصفري كالآتي :

ذكـــاء / تحصيل	ممتـــاز	ضعيف	المجمـــوع
ناجـــح	٣٠	٢٠	٥٠
راسب	٣٠	٢٠	٥٠
المجموع	٦٠	٤٠	١٠٠

جدول (٨٤) التكرار على أساس الفرض الصفري

ومن هذين الجدولين يمكن أن نحصل على جدول ثالث يشتمل على الفروق بين

التكرارات التجريبية والتكرارات النظرية على أساس الفرض الصفري ويكون هذا الجدول كـــالآتي :

الذكاء / التحصيل	ممتـــاز	ضعيف	المجمـــوع
ناجـــح	١٠	ـ ١٠	صفر
راسب	ـ ١٠	١٠	صفر
المجموع	صفر	صفر	صفر

جدول (٨٥) الفروق بين التكرارات التجريبية والتكرارات النظرية

من الطبيعي أن صحة هذا الفرض أو خطأه يتوقف على هذه الفروق ، فان كانت هذه الفروق كبيرة كان هناك احتمال في خطأ الفرض الصفري ، وان كانت صغيرة كان الاحتمال كبيرا في صحته .

وهذه الفروق لا تعطي دلالة واضحة عن مدى بعد النتيجة التجريبية عما يتوقع لها اذا نظر اليها نظرة مطلقة . فاذا كان التكرار الأصلي ١٠ وكان الفرق بين التكرارين الأصلي والنظري ١٠ كان الموقف مختلفا عما اذا كان التكرار الأصلي ١٠٠ وكان الفرق بين التكرارين ١٠ أيضا ، كما أن هناك ملاحظة أخرى وهي أن اشارة الفرق (سالبة أو موجبة) لا تهم في معرفة مدى قرب التكرارين أو بعدهما عن بعض . ولذا فان اختبار (كا٢) يقوم على تربيع هذه الفروق وقسمة هذه المربعات على التكرارات النظرية ، ثم جمع نواتج القسمة للتكرارات المختلفة . أي أن :

$$\text{كا}^2 = \text{مج} \frac{(\text{ك} - \text{كَ})^2}{\text{كَ}}$$

حيث ك : التكرار الملاحظ (التجريبي) .

، كَ : التكرار النظري (حسب الفرض المختبر) .

وتفسير هذا أن كا٢ تعادل مجموع خوارج قسمة مربعات الفروق على التكرارات

النظرية ويلاحظ أن مربع الفرق يقسم على التكرار النظري لا التكرار التجريبي الأصلي .
ولحساب قيمة كا ٢ في المثال السابق تتبع الخطوات الآتية :

التكرار التجريبي ك	التكرار النظري كَ	ك ـ كَ	(ك ـ كَ)	(ك ـ كَ) / كَ
٤٠	٣٠	١٠	١٠٠	٣,٣٣
٢٠	٣٠	ـ ١٠	١٠٠	٣,٣٣
١٠	٢٠	ـ ١٠	١٠٠	٥,٠٠
٣٠	٢٠	١٠	١٠٠	٥,٠٠
١٠٠	١٠٠			١٦,٦٦

جدول (٨٦) حساب $كا^2$

∴ $كا^2$ في هذا المثال = ١٦,٦٦

والخطوة الباقية هي معرفة درجات الحرية ، ثم الكشف في جدول $كا^2$ عما اذا كانت قيمة $كا^2$ لهذه القيمة من درجات الحرية ذات دلالة عند نسبة ٠,٠٥ ثم عند نسبة ٠,٠١ .

ودرجات الحرية في مثل هذا الجدول =

(عدد الأعمدة ـ ١) (عدد الصفوف ـ ١) .

(ذلك لأننا مقيدون في كل صف أو عامود بقيمة واحدة حتى يكون مجموع الصف أو العامود ثابتا) [1] .

∴ د . ح = (٢ ـ ١) (٢ ـ ١)
= ١

(١) ويمكن حساب درجات الحرية بطريقة أخرى : ففي الجدول ٤ خانات تعطي ٤ درجات من الحرية الا أننا مقيدون في ملء هذه الخانات بأربعة قيود ، هي حواصل الجمع ولكننا في ذلك نكون قد تقيدنا بالمجموع الكلي مرتين : مرة في حواصل جميع الأعمدة ومرة في حواصل جميع الصفوف ، فينبغي أن نزيد ١ على درجات الحرية الناتجة فتكون درجات الحرية = ٤ ـ ٤ + ١ = ١ .

د ح	٠,٩٩	٠,٩٨	٠,٩٥	٠,٩٠	٠,٨٠	٠,٧٠
١	٠,٠٠٠١٥٧	٠,٠٠٠٦٢٨	٠,٠٣٦٣	٠,٠١٥٨	٠,٠٦٤٢	٠,١٤٨
٢	٠,٠٢٠١	٠,٠٤٠٤	٠,١٠٣	٠,٢١١	٠,٤٤٦	٠,٧١٣
٣	٠,١١٥	٠,١٨٥	٠,٣٥٢	٠,٥٨٤	١,٠٠٥	١,٤٢٤
٤	٠,٢٩٧	٠,٤٢٩	٠,٧١١	١,٠٦٤	١,٦٤٩	٢,١٩٥
٥	٠,٥٥٤	٠,٧٥٢	١,١٤٥	١,٦١٠	٢,٣٤٣	٣,٠٠٠
٦	٠,٨٧٢	١,١٢٤	١,٦٣٥	٢,٢٠٤	٣,٠٧٠	٣,٨٢٨
٧	١,٢٣٩	١,٩٦٤	٢,١٦٧	٢,٨٣٣	٣,٨٢٢	٤,٦٧١
٨	١,٦٤٦	٢,٠٣٢	٢,٧٣٢	٣,٤٩٠	٣,٥٩٤	٥,٥٢٧
٩	٢,٠٨٨	٢,٥٣٢	٣,٣٢٥	٤,١٦٨	٥,٣٨٠	٦,٢٩٣
١٠	٢,٥٨٨	٣,٠٥٩	٣,٩٤٠	٤,٨٦٥	٦,١٧٩	٧,٢٦٧
١١	٣,٠٥٣	٢,٦٠٩	٤,٥٧٥	٥,٥٧٨	٦,٩٨٩	٨,١٤٨
١٢	٣,٥٧١	٤,١٧٨	٥,٢٢٦	٦,٣٠٤	٧,٨٠٧	٩,٠٣٤
١٣	٤,١٠٧	٤,٧٦٥	٥,٨٩٢	٦,٠٤٢	٨,٦٣٤	٩,٩٢٦
١٤	٤,٦٦٠	٥,٣٦٨	٦,٥٧١	٧,٧٩٠	٩,٤٦٧	١٠,٨٢١
١٥	٥,٢٢٩	٥,٩٨٥	٧,٢٦١	٧,٥٤٧	١٠,٣٠٧	١١,٧٢١
١٦	٥,٨١٢	٦,٦١٤	٧,٩٦٢	٩,٣١٢	١١,١٥٢	١٢,٦٢٤
١٧	٦,٤٠٨	٧,٢٥٥	٨,٦٧٢	٩,٠٨٥	١٢,٠٠٢	١٣,٥٣٠
١٨	٧,٠١٥	٧,٩٠٩	٩,٣٩٠	١٠,٨٦٥	١٢,٨٥٧	١٤,٤٤٠
١٩	٧,٦٣٣	٨,٥٦٧	١٠,١١٧	١١,٦٥١	١٣,٧١٩	١٥,٣٥٢
٢٠	٨,٢٦٠	٩,٢٢٧	١٠,٨٥١	١٢,٤٤٣	١٤,٥٧٨	١٦,٢٦٦
٢١	٨,٨٩٧	٧,٩١٥	١١,٥٩١	١٣,٢٤٠	١٥,٤٤٥	١٧,١٨٢
٢٢	٩,٥٤٢	١٠,٦٠٠	١٢,٣٣٨	١٤,٠٤١	١٦,٣١٤	١٨,١٠١
٢٣	١٠,١٩٦	١١,٢٩٣	١٣,٠٩١	١٤,٨٤٨	١٧,١٨٧	١٩,٠٢١
٢٤	١٠,٨٥٦	١١,٩٩٢	١٣,٨٤٨	١٥,٦٥٩	١٨,٠٦٢	١٩,٩٤٣
٢٥	١١,٥٢٤	١٢,٦٩٧	١٤,٦١١	١٦,٤٧٣	١٨,٩٤٠	٢٠,٨٦٧
٢٦	١٢,١٩٨	١٣,٤٠٩	١٥,٣٧٩	١٧,٢٩٢	١٩,٨٢٠	٢١,٧٩٢
٢٧	١٣,٨٧٩	١٤,١٢٥	١٦,١٥١	١٨,١١٤	٢٠,٧٠٣	٢٢,٧١٩
٢٨	١٣,٥٦٥	١٤,٨٤٧	١٦,٩٢٨	١٨,٩٣٩	٢١,٥٨٨	٢٣,٦٤٧
٢٩	١٤,٢٥٦	١٥,٥٧٤	١٧,٧٠٨	١٩,٧٦٨	٢٢,٤٧٥	٢٤,٥٧٧
٣٠	١٤,٣٩٥	١٦,٣٠٦	١٨,٤٩٣	٢٠,٥٩٩	٢٣,٣٦٤	٢٥,٥٠٨

د ح	٠.٠١	٠.٠٢	٠.٠٥	٠.١٠	٠.٢٠	٠.٣٠	٠.٥٠
١	٦.٦٣٥	٥.٤١٢	٣.٨٤١	٢.٧٠٦	١.٦٤٢	١ ٠٧٤	٠.٤٥٥
٢	٩.٢١٠	٧.٨٢٤	٥.٩٩١	٤.١٠٥	٢,٢١٩	٢,٤٠٨	١,٨٣٦
٣	١١.٣٤٥	٩.٨٣٧	٧,٨٧٥	٦,٢٥١	٤,٦٤٢	٣.٦٦٥	٢.٣٦٦
٤	١٣.٢٧٧	١١.٦٦٨	٩.٤٨٨	٧.٧٧٩	٥.٩٨٩	٤,٨٧٨	٣,٣٥٧
٥	١٥,٠٨٦	١٣,٣٨٨	١١.٠٧٠	٩,٢٣١	٧,٢٨٩	٦.٠٦٤	٤,٣٥١
٦	١٦.٦٢٢	١٥,٠٣٣	١٢,٥٩٢	١٠.٦٤٥	٨,٥٥٨	٧,٢٣١	٥.٣٤٨
٧	١٨,٤٦٥	١٦,٦٢٢	١٤,٠٦٧	١٢.٠١٧	٩,٨٠٣	٨,٣٨٣	٦,٣٤٦
٨	١٠.٠٩٠	١٨.١٦٨	١٥,٥٠٧	١٣.٣٦٢	١١.٠٣٠	٩,٥٢٤	٧,٣٤٤
٩	٢١.٦٦٦	١٩.٦٧٩	١٦,٩١٩	١٤,٦١٤	١٢,٢٤٢	١٠,٦٥٧	٨,٣٤٣
١٠	٢٤.٢٠٩	٢١.١٦١	١٨,٣٠٧	١٥,٩٨٧	١٣,٤٤٢	١١,٧٨١	٩,٣٤٢
١١	٢٤.٧٢٥	٢٢,١١٨	١٩.٦٧٥	١٧,٢٧٥	١٤,٦٣١	١٢,٨٩٩	١٠,٣٤١
١٢	٢٦,٢١٧	٢٤,٠٥٤	٢١.٠٢٦	١٨,٥٤٩	١٥.٨١٢	١٤.٠١١	١١,٣٤٠
١٣	٣٧,٦٠٨	٢٥,٤٧١	٢٢,٣٦٢	١٩,٨١٢	١٦,٩٨٥	١٥,١١٩	١٢.٣٤٠
١٤	٢٩,١٤١	٢٦,٨٧٣	٢٣,٦٨٥	٢١.٠٦٤	١٨,١٥١	١٦,٢٢٢	١٣.٣٣٩
١٥	٣٠,٥٧٨	٢٨,٢٥٩	٢٤.٩٩٦	٢٣,٣٠٧	١٩,٢١١	١٧,٣٢٢	١٤.٣٣٩
١٦	٣٢,٠٠٠	٢٩,٦٣٣	٢٦,٢٩٦	٢٣,٥٤٢	٢٠,٤٦٥	١٨.٤١٨	١٥,٣٣٨
١٧	٣٣,٤٠٩	٣٠,٩٩٥	٢٧,٥٨٧	٢٤,٧٦٩	٢١,٦١٥	١٩,٥١١	١٦.٣٣٨
١٨	٣٤,١٠٥	٣٢,٣٤٦	٢٨,٨٦٩	٢٥,٩٨٩	٢٢,٧٦٠	٢٠,٦٠١	١٧.٣٣٨
١٩	٣٦,١٩١	٣٣,٦٨٧	٣٠,٠٤٤	٢٧,٢٠٤	٢٣,٩٠٠	٢١,٦٨٩	١٨,٣٣٨
٢٠	٣٧,٥٦٦	٣٥,٠٢٠	٣١,٤١٠	٢٨,٤١٢	٢٤.٠٣٨	٢٢,٧٧٥	١٩,٣٣٧
٢١	٣٨,٩٣٢	٣٦,٣٤٣	٣٢,٦٧١	٢٩,٦١٥	٢٥,١٧١	٢٣,٨٥٨	٢٠,٣٣٧
٢٢	٤٠,٢٨٩	٣٧,٦٥٩	٣٣,٩٢٤	٣٠,٨١٣	٢٧,٣٠١	٢٤,٩٣٩	٢١,٣٣٧
٢٣	٤١,٦٣٨	٣٨,٩٦٨	٣٥,١٧٠	٣١,٠٠٧	٢٨,٤٢٩	٢٦,٠١٨	٢٢,٣٣٧
٢٤	٤٢,٩٨٠	٤٠,٢٧٠	٣٦,٤١٥	٣٣,١٩٦	٢٩,٥٥٣	٢٧,٠٩٦	٢٣,٣٣٧
٢٥	٤٤,٣١٤	٤١,٥٦٦	٣٧,٦٥٢	٣٤,٣٨٢	٣٠,٦٧٥	٢٨,١٧٢	٢٤,٣٣٧
٢٦	٤٥,٦٤٢	٤٢,٨٥٦	٣٨,٨٨٥	٣٥,٥٦٣	٣١,٧٩٥	٢٩,٢٤٦	٢٥,٣٣٦
٢٧	٤٦,٩٦٣	٤٤,١٤٠	٤٠,١١٣	٣٦,٧٤١	٣٢,٩١٠	٣٠,٣١٩	٢٦,٣٣٦
٢٨	٤٨,٢٧٨	٤٥,٤١٩	٤١,٣٣٧	٣٧,٩١٦	٣٤,٠٢٧	٣١,٣٩١	٢٧,٣٣٦
٢٩	٤٦,٦٩٣	٤٢,٥٥٧	٣٩,٠٨٧	٣٥,١٣٩	٣٥,١٣٩	٣٢,٤٦١	٢٨,٣٣٦
٣٠	٥٠,٨٩٢	٤٧,٨٦٧	٤٣,٧٧٣	٤٠,٢٥٦	٣٦,٢٥٠	٣٣,٥٣٠	٢٩,٣٣٦

جدول(٨٧) قيم كا ٢ المقابلة لنسب الاحتمالات المختلفة

وهـــذا جـــدول كا ٢ لنسب احتمالات مختلفة حتى تناسب الأهداف المختلفة للبحث . ولكن النسبتين الشائعتي الاستعمال هما نسبتا ٠,٠٥ ، ٠,٠١ كما سبق .

واذا بحثنا في الجدول أمام درجة الحرية [1] في عامودي نسبة الاحتمال ٠,٠٥ ونسبة احتمال ٠,٠١ نجد أن قيمتي كا ٢ هما على الترتيب ٣,٨٤١ ، ٦,٦٣٥ .

وكا ٢ التي حصلنا عليها تزيد كثيرا عن هاتين القيمتين ، مما يدل على أنها ذات دلالة عند النسبتين ، أي أن الفرض الصفري لا يقوم عن أساس سليم ، أي أن التجربة قد أثبتت أن لمستوى الذكاء أثرا فعلي في النجاح التحصيلي . فاختبار (كا ٢) يستخدم عادة كمحك لقبول أو رفض الفرض الصفري .

وفي حالات الجداول التي تتساوى فيها الفروق بين التكرارات النظرية والتجريبية في الخلايا الأربع يمكن أن نحول القانون الذي نحسب به كا ٢ الى (ك ــ كَ) مجـ $\frac{١}{كَ}$

مثال آخر : عمل استفتاء اجتماعي عن موضوع « التعليم المشترك »
في المستوى الثانوي فكانت النتيجة كما يلي :

	موافق جدا	موافق	محايد	معارض	معارض بشدة	المجموع
عدد الاجابات	٣٣	٤٧	٢٣	٢٨	١٩	١٥٠

فهل يمكن الاعتماد على هذه النتيجة التي عدد الموافقين فيها (٣٣ + ٤٧) = ٨٠ وعدد المعارضين فيها (٢٨ + ١٩) = ٤٧ ، أم أن الفروق بين التكرارات نتجت بمحض الصدفة وراجعه لظروف الاستفتاء واختيار العينة ؟ المتبع في مثل هذه الحالات أن نفترض فرضا صفريا وهو « أن التكرارات الحقيقية في المجتمع الأصلي متعادلة ، وليس هناك اتجاه حقيقي لزيادة الموافقين عن المعارضين » . وبناء على هذا الفرض الصفري تنشيء جدولا تكراريا جديدا فيه تتساوى تكرارات الفئات الخمسة (مع تقيدنا بالمجموع ١٥٠) أي أن الجدول النظري يصبح كالآتي :

	موافق جدا	موافق	محايد	معارض	معارض بشدة	المجموع
عدد الاجابات	٣٠	٣٠	٣٠	٣٠	٣٠	١٥٠

ثم تقارن بين التكرار التجريبي والنظري وتحسب كا ٢ :

التكرار التجريبي ك	التكرار النظري كَ	ك ـ كَ	ك ـ كَ	(ك ـ كَ) ١ / كَ
٣٣	٣٠	٣	٩	٠,٣٠
٤٧	٣٠	١٧	٢٨٩	٩,٦٣
٢٣	٣٠	٧ ـ	٤٩	١,٦٣
٢٨	٣٠	٢ ـ	٤	٠,١٣
١٩	٣٠	١١ ـ	١٢١	٤,٠٣
١٥٠	١٥٠	ـ		١٥,٧٢

جدول (٨٨) حساب كا٢ لاجابات الاستفتاء

ودرجات الحرية في هذا المثال ن ـ ١ ، وينبغي أن لا يفوتنا هنا أن ن هي عـــدد التكرارات وليس مجموعها كما كان الحال في اختبار « ت » أي أنها تساوي هنا ٥ ـ ١ = ٤ (لأننا كنا مقيدين بقيد واحد في وضع التكرارات النظرية المتساوية وهو مجموع التكرارات) واذا رجعنا الى جدول كا ٢ في صف درجات الحرية ٤ نجد أنها تعادل ٩,٤٨٨ عند نسبة ٠,٠٥ وتعادل ١٣,٢٧٧ عند نسبة ٠,٠١ ، وما دامت كا ٢ في جدول (٨٩) أكبر من هاتين القيمتين فاننا نكون محقين في رفض الفرض الصفري ، ذلك لأن النتيجة التي حصلنا عليها لا تحدث إلامرة واحدة في كل مائة مرة عن طريق الصدفة اذا كان الفرض الصفري صحيحا ، أي أن هذه التكرارات التجريبية ذات دلالة احصائية وأن هناك اتجاها حقيقيا في المجتمع الأصلي للموافقة أكثر منه للمعارضة .

كا ٢ في حالة الجداول التكرارية ذات التكرار الصغير :

في كثير من الأحيان تحتوي خلايا الجدول التكراري المزدوج على تكرارات صغيرة وفي مثل هذه الحالات يفضل اجراء تصحيح في الفروق بين التكرارات وقد اقترح هذا التصحيح يول Yule ويطلق عليه تصحيح الاستمرار Correction for Continuity [1] والفكرة من هذا التصحيح أن نظرية العينات تؤدي بنا الى اعتبار التقسيم مستمرا وليس محددا بنقط حادة فاصلة ، واعتبار هذه النقط على أنها منتصف فترة ، هي مرحلة الانتقال بين القسمين ، ولذا يفضل دائما أن نعمل حسابا لكسرقدره ٠,٥ في كل فرق بين التكرار التجريبي والمتوقع ، ولنأخذ مثالا لتطبيق هذا التصحيح . لنفرض أننا أجرينا استبيانا Questionnarre نفسيا للسيطرة والخضوع Ascendance-Submission . على خمسين مراهقا ، فكانت النتيجة التجريبية أن ٢٨ أجابوا اجابات تجعلهم يوصفون بالسيطرة ، و ٢٢ أجابوا اجابات تجعلهم يوصفون بالخضوع . فهل نكون محقين في وصف المراهقين بأنهم يميلون الى السيطرة أكثر من الخضوع ؟ للاجابة على ذلك نفترض فرضا صفريا مؤداه « أنه ليس هناك ميل خاص بين المراهقين الى السيطرة أو الخضوع وبناء على هذا الفرض يكون من المتوقع أن يوصف نصف العدد الكلي بكل من الصفتين أي أن الوضع التجريبي والمتوقع يمكن تلخيصه كما يلي :

	مسيطر	خاضع	مجموع
تكرارات تجريبية	٢٨	٢٢	٥٠
تكرارات نظرية	٢٥	٢٥	٥٠
الفرق	٣	٣	

ويكون الفرق بعد التصحيح ٢,٥   ٢,٥

$$\text{وتكون كا}^2 = \frac{(٢,٥)^2}{٢٥} + \frac{(٢,٥)^2}{٢٥}$$

$$= ٥$$

وتكون عدد درجات الحرية = ٢ ـ ١ = ١

---

(١) Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis (1939) and Sendecor, G.W. Statistical Methods. (1937).

وواضح من جدول كا ٢ أن النتيجة تقل عن قيمة كا ٢ عند درجة حرية ١ ونسبة احتمال ٠،٠٥ (٣،٨١١) ونسبة احتمال ٠،٠١ (٦،٦٣٥) أي أن كا ٢ هنا لا دلالة احصائية لها . مما يرجح قبول الفرض الصفري وهو أنه ليس هناك ميل خاص لأية ناحية من هاتين الناحيتين عند المراهقين .

كا٢ في قياس مدى انطباق التوزيع على التوزيع الاعتدالي :

تكلمنا في الباب الخامس عن خواص المنحنى الاعتدالي . وبينا أن هذا النموذج من التوزيع انما هو نموذج نظري صرف لا يحدث عمليا أن ينطبق عليه التوزيع التجريبي لأي صفة نفسية أو أي متغير طبيعي انطباقا تاما . ولكن الذي يحدث دائما أننا نفترض هذا التوزيع في أغلب السمات النفسية والاجتماعية في المجتمع الأصلي ، ويكون هدف الباحث مقارنة التوزيع الذي يحصل عليه بهذا التوزيع الاعتدالي النظري . وقد ذكرنا أن الطريقة لهذه المقارنة تنحصر في تهيئة Fitting أقرب توزيع اعتدالي لما حصل عليه الباحث من بيانات ، مع التقيد في هذه التهيئة بالمعاملات الأصلية في التوزيع التجريبي كالمتوسط الحسابي ، الانحراف المعياري كما يجب التقيد كذلك بعدد الحالات التي شملها البحث : وطريقة تحويل التوزيع الى التوزيع الاعتدالي موضحة في ص جدول ٥٤ ، وتشتمل على تحويل القيم الى درجات معيارية ثم تعديل التكرارات الأصلية الى تكرارات مستمدة من ارتفاعات المنحنى الاعتدالي النظري .

وقد ذكرنا أنه يمكن المقارنة بالنظر بين التكرارات الأصلية والتكرارات المعدلة ، فاذا كان الفرق كبيرا دل ذلك على أن التوزيع التجريبي لم يأت من التوزيع أصلي اعتدالي . الا أن مدى كبر الفروق بين التكرارين ينبغي أن نصل اليه عن طريق احصائي . ونظرا لأن اختبار كا ٢ يوصلنا الى المقارنة الاحصائية بين أي تكرار تجريبي وأي تكرار آخر نظري نفترضه فان هذا الاختبار هو خير ما يصلح للوصول الى هذا الهدف ، حيث يمكننا أن نفترض الفرض الصفري الآتي « لا يوجد فرق جوهري ذو دلالة بين التكرار التجريبي الذي حصلنا عليه والتكرار الاعتدالي النموذجي » .

ولتوضيح الخطوات المتبعة في هذا السبيل نرجع الى جدول ٣٤ فقد كانت التكرارات الأصلية التجريبية والتكرارات النظرية المعدلة كما هو مبين فيما يأتي :

الفئـــات	التكرار ك	التكرار المعـــدل كَ
		٤,٤٢
٢٠ —	١٦	٨,٨٥
٤٠ —	٢٢	١٧,٧٠
٥٠ —	٢٧	٢٨,٨٢
٦٠ —	٣٥	٢٨,٧٢
٧٠ —	٤٥	٤٤,٢٤
٧٠ —	٤٢	٤٢,٠٣
٩٠ —	٢٨	٣٣,١٨
١٠٠ —	١٩	٢٢,١٢
١١٠ —	١٤	١٢,١٧
١٢٠ —	١٢	٥,٥٣
		٢,٢١
المجموع	٢٦٠	٢٥٩,٩٩

جدول (٨٩) تكرارات معدلة حسب التوزيع الاعتدالي

ويلاحظ أننا أضفنا في التكرارات المعدلة فئة عند كل طرف نظرا لاحتمال أن العينة التجريبية لم تشتمل على القيم الصغيرة جدا أو الكبيرة جدا ، فلحساب كا ٢ لهذه المقارنة نتبع الخطوات المعتادة ، كما في الجدول الآتي وقد ضمننا التكرارين الزائدين على تكرار أول وآخر فئة لتتسنى المقارنة بين التكرارات المقابلة .

الفئات	التكرار (ك)	التكرار المعدل ك̄	(ك - ك̄)	(ك - ك̄)²	(ك - ك̄)² / ك̄
٣٠ —	١٦	١٣.٢٧	٢.٧٣	٧.٤٥	٠.٥٦
٤٠ —	٢٢	١٧,٧٠	٤.٣٠	٨,٤٩	١,٠٤
٥٠ —	٢٧	٢٨,٨٢	١.٨٢ —	٣,٣١	٠,١١
٦٠ —	٣٥	٣٨.٧٢	٣,٧٢ —	١٣,٨٤	٠,٣٦
٧٠ —	٤٥	٤٤.٢٤	٠.٧٦	٠,٥٨	٠,٠١
٨٠ —	٤٢	٤٢,٠٣	٠,٠٣ —	—	—
٩٠ —	٢٨	٣٣.١٨	٥,١٨ —	٢٦,٨٣	٠,٨١
١٠٠ —	١٩	٢٢,١٢	٣,١٢ —	٩.٧٣	٠,٤٤
١١٠ —	١٤	١٢,١٧	١,٨٣	٣,٣٥	٠,٢٧
١٢٠ —	١٢	٧,٧٤	٤,٢٦	١٨.١٥	٢,٣٤
المجموع	٢٦٠	٢٥٩.٩٩	١٣,٨٨ ١٣,٨٧ —		٥,٩٤

جدول (٩٠) مقارنة بين التكرار الأصلي والتكرار المعدل باستخدام اختبار كا٢

من هذا الجدول نجد أن كا ٢ = ٥,٩٤

ولحساب درجات الحرية ينبغي أن نذكر أنه في تعديل هذه التكرارات كنا مقيدين بقيود ثلاث هو المتوسط والانحراف المعياري ومجموع التكرارات ولذا فان درجات الحرية تساوي عدد الفئات — ٣ (وينبغي ألا نخلط بين عدد الفئات وعدد الحالات الذي هو مجموع التكرارات كما كنا نحسب درجات الحرية في اختبار « ت ») .

واذا رجعنا الى جدول كا ٢ عندما تكون درجات الحرية ٧ نجد أن نسبة ٠,٠٥ يجب أن تصل الى كا ٢ الى ١٤٠٦٧ حتى تكون ذات دلالة وعند نسبة ٠,٠١ يجب أن تصل الى ١٨.٤٧٥ . وعلى هذا تكون كا ٢ ليست ذات دلالة احصائية ، ولذا نستطيع أن نقبل الفرض الصفري الذي يفيد بأنه ليس هناك فرق جوهري بين التكرار التجريبي الذي حصلنا عليه والتكرار الاعتدالي النظري .

ونضيف هنا ملاحظة صغيرة وهي أنه اذا قل تكرار احدى الفئات عن (٥) ضممت هذه الفئة الى الفئة التي قبلها أو بعدها واعتبرت الفئتان فئة واحدة وذلك لأن تطبيق اختبار كا ٢ يشترط فيه أن يكون كل تكرار في الجدول ٥ على الأقل .

استخدام كا ٢ في اختبار اعتماد متغيرين كل على الآخر :

X^2 as a test of Dependence

اذا حاول باحث ايجاد العلاقة بين متغيرين فالطريقة الطبيعية كما ذكرنا سابقا – هي ايجاد معامل الارتباط بينهما ، مستخدما في ذلك أي معامل من المعاملات التي سبق لنا ذكرها . ولكنه لا يتسنى ذلك الا اذا تيسر له الحصول على فترات عددية منتظمة لكل متغير ، أما اذا كانت البيانات التي حصل عليها لا تسمح بهذا التقسيم العددي المنتظم لجأ الى معامل التوافق (ق) في ذلك .

هذا ويمكن استخدام كا ٢ في اختبار صحة الفرض بأن المتغيرين منفصلان عن بعضهما تماما من حيث الأثر ، بحيث لا تأثير لتغير أحدهما في تغير الآخر أي في اختبار استقلال Independence كل من المتغيرين عن الآخر .

واليك مثل لتطبيق اختبار كا٢ في مثل هذه الحالات :

أراد باحث معرفة العلاقة بين التوافق الاجتماعي لطلبة الكليات ونجاحهم الدراسي ، فأجرى استبيانا للتوافق الاجتماعي على عينة من هؤلاء الطلبة ، ثم قسمهم حسب نجاحهم تبعا لتقديراتهم في النجاح ، فكانت نتيجة البحث كما هو مبين في الجدول الآتي :

التوافق الدراسة	توافق عال	توافق معتدل	توافق منخفض	المجموع
ممتـــاز	١٢	٩	٩	٣٠
جيدا جدا	٨	١٥	٧	٣٠
جيـــد	٨	٣٦	١٦	٦٠
مقبـــول	٦	٦٥	٩	٨٠
ضعيف	٨	١١	٣١	٥٠
ضعيف جدا	٨	١٤	٢٨	٥٠
المجموع	٥٠	١٥٠	١٠٠	٣٠٠

جدول (٩١) العلاقة بين النجاح الدراسي والتوافق الاجتماعي لطلبة الكليات .

ويهدف الباحث الى معرفة هل يعتمد كل من المتغيرين على الآخر أم أنهما مستقلان تماما بعضهما عن بعض . :

والطريقة هنا هي نفس الطريقة المتبعة دائما في تطبيق اختبار كا ٢ ، وهي تنحصر في تكوين جدول تكراري على أساس الفرض الصفري ، أي على أساس استقلال العاملين بعضهما عن بعض ، فاذا ثبت بعد ذلك أن كا٢ ذات دلالة احصائية رفضنا الفرض الصفري . واذا ثبت أنها ذات دلالة قبلنا الفرض الصفري ، واعتبرنا المتغيرين مستقلين .

لمعرفة عدد الممتازين الذين على درجة كبيرة من التوافق على فرض استقلال العامل الدراسي وعامل التوافق نلاحظ أن عدد الممتازين جميعا ٣٠ طالبا . (مجموع الصف الأول) ، كما نلاحظ أن في المجموعة كلها البالغ عددها ٢٠٠ طالبا ٥٠ منهم متوافقا توافقا عاليا ، أي ما يعادل $\frac{١}{٦}$ المجموعة الكلية . فان لم تكن هناك أي علاقة بين الدراسة والتوافق توقعنا أن النسبة $\frac{١}{٦}$ ($\frac{٥٠}{٣٠٠}$) تكون محفوظة في جميع مراتب الدراسة. أي نتوقع أن يكون عدد الذين نجحوا برتبة جيد جدا ومتوافقين توافقا عاليا ٣٠ × $\frac{٥٠}{٣٠٠}$ ، ونتوقع أيضا أن يكون عدد الذين نجحوا برتبة جيد ومتوافقين توافقا عاليا ٦٠ × $\frac{٥٠}{٣٠٠}$ ... وهكذا ، في جميع تكرارات العامود الأول .

وفي حالة تكرارات خلايا العامود الثاني نجد أن عدد المتوافقين توافقا معتدلا يعادل نصف المجموعة الكلية ($\frac{١٥٠}{٣٠٠}$) . فيجب أن تظل هذه النسبة محفوظة في جميع خلايا هذا العامود على فرض أنه ليس هنالك علاقة بين المتغيرين ، فنتوقع أن يكون عدد الممتازين المتوافقين توافقا معتدلا ٣٠ × $\frac{١٥٠}{٣٠٠}$ ، وعدد الناجحين برتبة جيد جدا ومتوافقين توافقا معتدلا ٣٠ × $\frac{١٥٠}{٣٠٠}$ ، والناجحين برتبة جيد ٦٠ × $\frac{١٠٠}{٣٠٠}$ وهكذا .

ونلاحظ من هذا أن التكرار المتوقع لكل خلية من خلايا هذا الجدول يساوي

$$\frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العامود}}{\text{المجموع الكلي}}$$

فاذا رمزنا للصف بالرمز أ وللعامود بالرمز ب كان التكرار المتوقع للخلية في الصف أ والعامود ب أي الخلية أ ب ذات التكرار $ك_{أب}$

$$\frac{ك_{أ} \times ك_{ب}}{ك}$$

والخطوة التالية هي تكوين جدول من التكرارات النظرية كالآتي :

التوافق / الدراسة	توافق عال	توافق معتدل	توافق ضعيف	المجموع
ممتاز	٥	١٥	١٠	٣٠
جيد جدا	٥	١٥	١٠	٣٠
جيد	١٠	٣٠	٢٠	٦٠
مقبول	١٣,٣	٤٠	٢٦,٧	٨٠
ضعيف	٨,٣	٢٥	١٦,٧	٥٠
ضعيف جدا	٨,٣	٢٥	١٦,٧	٥٠
المجموع	٤٩,٩	١٥٠	١٠٠,١	٣٠٠

جدول (٩٢) التكرارات المتوقعة على أساس الفرض الصفري

وبعد ذلك نستطيع أن نحسب كا^2 بنفس الطريقة المعتادة :

التكرار الأصلي ك	التكرار المتوقع كَ	(ك ـ كَ)	(ك ـ كَ)	(ك ـ كَ)^2 / كَ
١٢	٥	٧	٤٩	٩,٨٠
٩	١٥	٦	٣٦	٢,٤٠
٩	١٠	–١	١	٠,١٠
٨	٥	٣	٩	١,٨٠
١٥	١٥	—	—	—
٧	١٠	–٣	٩	٠,٩٠
٨	١٠	–٢	٤	٠,٤٠
٢٦	٣٠	٦	٣٦	٠,٢٠
١٦	٢٠	–٤	١٦	٠,٨٠
٦	١٣,٣	–٧,٣	٥٣,٢٩	٤,٠١
٦٥	٤٠	٢٥	٦٢٥	١٥,٦٢
٩	٢٦,٧	–١٧,٧	٢١٣,٢٩	١١,٧٣
٨	٨,٣	–٠,٣	٠,٠٩	٠,٠١
١١	٢٥	–١٤,٠	١٩٦	٧,٨٤
٣١	١٦,٧	١٤,٣	٢٠٤,٤٩	١٢,٢٥
٨	٨,٣	–٠,٣	٠,٠٩	٠,٠١
٤	٢٥	–١١	١٢١	٤,٨٤
٢٨	١٦,٧	١١,٣	١٢٧,٦٩	٧,٦٥
٣٠٠	٣٠٠	٦,٦٦ –٦,٦٦ ٠٠٠		٨١,٣٧

جدول (٩٣) حساب كا^2 في اختبار اعتماد متغيرين كل على الآخر

من هذا الجدول يتضح أن كا^2 = ٨١,٣٧

ودرجات الحرية = (٣ ـ ١) (٦ ـ ١) = ١٠

وبالرجوع الى جدول كا ² نجد أن قيمتها ذات الدلالة لهذا العدد من درجات الحرية عند ٠,٠٥ تعادل ٢٤,٩٩٦ وعند ٠,٠١ تعادل ٣٠,٥٧٨ . أي أن قيمة كا ² في الجدول ذات دلالة احصائية عند هاتين النسبتين مما يجعلنا نرفض الفرض الصفري . ويؤدي بنا هذا الى احتمال اعتماد كل من المتغيرين (التوافق والدراسة) كل على الآخر .

ويمكن تلخيص طريقة حساب كا ² في الجدول التوافقي في القانون الآتي :

$$\text{كا}^2 = \text{مج} \; \frac{\text{ك}_{\text{أب}} - \dfrac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}}{\dfrac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}}$$

وهو يتطلب الخطوات الآتية :

١ – احسب التكرار النظري لكل خلية فاذا رمزنا للخلية بالرمز أ ب وكان رمز تكرارها الأصلي $\text{ك}_{\text{أب}}$ فان تكرارها النظري المقابل للتكرار التجريبي يحسب بضرب الصف $\text{ك}_{\text{أ}}$ × تكرار العامود $\text{ك}_{\text{ب}}$ وقسمة الناتج على التكرار الأصلي ك .

٢ – اطرح كل تكرار نظري من التكرار الأصلي (التجريبي المقابل له) أي احسب

$$\text{ك}_{\text{أب}} - \frac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}$$

٣ – ربع هذا الفرق أي أوجد $\left(\text{ك}_{\text{أب}} - \dfrac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}\right)^2$

٤ – اقسم مربع الفرق في كل خلية على التكرار النظري لها أي أوجد

$$\frac{\text{ك}_{\text{أب}} - \dfrac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}}{\dfrac{\text{ك}_{\text{أ}} \,.\, \text{ك}_{\text{ب}}}{\text{ك}}}$$

٥ – اجمع خوارج القسمة للخلايا المختلفة ، فيكون حاصل الجمع هو قيمة كا² .

٦ – احسب درجات الحرية للجدول التوافقي وهي تساوي :

(عدد الصفوف – ١) × (عدد الأعمدة – ١) .

٧ – اكشف عن قيمة كا ٢ ذات الدلالة المقابلة لعدد درجات الحرية من جدول كا ٢ عند نسبتي ٠,٠٥ و ٠,٠٠١ . فان كانت القيمة الناتجة أقل من القيمة في جدول كا٢ دل ذلك على استقلال المتغيرين بعضهما عن بعض . وان كانت أكبر منها دل ذلك على اعتمادهما بعضهما على بعض .

حساب معامل التوافق من كا ٢ :

بالرغم من أن اختبار كا ٢ يفيد الباحث في تحديد ما اذا كان أحد المتغيرين يعتمد على الآخر ، أم أنهما مستقلان عن بعضهما تماما . الا أنه في الحالات التي يتضح من هذا الاختبار أن المتغيرين مرتبطان لا يفيد الاختبار كما هو في معرفة مدى العلاقة بينهما ولكن بتعديل بسيط في قيمة كا ٢ يمكن أن نحصل على قيمة قريبة من معامل التوافق الذي سبق ايضاحه في الباب السابق .

وطريقة حساب معامل التوافق من قيمة كا ٢ تنحصر في تطبيق

$$ق = \sqrt{\frac{كا^2}{ن + كا^2}}$$

ولتطبيق هذا القانون في المثال السابق نجد أن :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{٨١,٣٧}{٣٨١,٣٧}}$$

$$= ٠,٤٦$$

ومعامل التوافق لا يحسب في هذه الحالة الا بعد تطبيق اختبار كا٢ . والاستدلال من هذا الاختبار على أن هناك علاقة بين المتغيرين : أما اذا أثبت هذا الاختبار أن المتغيرين مستقلان كل عن الآخر فيكون لا معنى مطلقا حينئذ لحساب معامل التوافق ، لأنه في هذه الحالة يكون عادة عديم الدلالة .





تحليل التباين :

يستخدم اختبار « ت » في المقارنة بين متوسط مجموعتين لمعرفة ما اذا كان الفرق بينهما جوهريا لا يمكن أن يكون قد حدث عن طريق الصدفة ، أو بمعنى آخر لاختبار الفرض بأن المجموعتين يمكن اعتبارهما عينتين من مجتمع أصلي واحد ، ويمكن تحوير هذين الفرضين ووضعهما على صورة فرض صفري بأنه ليس هناك فرق حقيقي بين المتوسطين في المجتمع الأصلي .

ويضطر الباحث في كثير من الأحيان أن يختار عينته التجريبية من جهات متعددة . فيجري اختباره مثلا على عينة من مدارس متباينة ، أو من مستويات مختلفة من الثقافة ، أو مستويات اقتصادية اجتماعية متنوعة ، أو من بلاد مختلفة ، ومثل ذلك حينما يجري الباحث استفتاء عن موضوع معين ، أو بحثا اكتشافيا للرأي العام نحو مشكلة خاصة فيجمع العينة التجريبية من أوساط وأقسام مختلفة . وتكون المشكلة التي يصادفها الباحث هي هل يكون محقا اذا جمع النتائج الجزئية التي حصل عليها ويعاملها على أنها نتيجة واحدة من مصدر واحد ، أم أن عليه أن يعاملها على أنها نتائج منفصلة مختلفة ؟ في مثل هذه الحالات ينبغي أن يتحقق من عدم دلالة ما بين هذه المجموعات وبعضها من فروق . ويمكنه القيام بهذا الاختبار على أساس المقارنة بين كل مجموعتين على حدة مستعملا في ذلك اختبار « ت » ومعنى هذا أنه يقوم بعدة اختبارات للوصول الى هدفه ، فان كان عدد المجموعات أربعة اضطر الى اجراء ٦ اختبارات واذا وصل عدد المجموعات الى ٨ كان عليه أن يجري ٢٨ اختبارا ←

ولكن طريقة تحليل التباين التي وضعها Fisher توصل الى هدف المقارنة بين مجموعات متعددة عن طريق مباشر . فالتباين هو متوسط مربعات فروق القيم عن المتوسط ، أي أنه مربع الانحراف المعياري . ويمتاز التباين عن الانحراف المعياري في أن استخدامه أعم وأنه يصلح لعمليات كثيرة ، فهو يخضع لعمليات الجمع مثلا فاذا جمعنا مجموعتين احداهما مكونة من $ن_١$ قيمة وانحرافها المعياري $ع_١$ والثانية من $ن_٢$ قيمة وانحرافها المعياري $ع_٢$ فقد توصل هلسن Helson الى حساب الانحراف المعياري للمجموعة الكلية المكونة منها من المعادلة الآتية :

$$ع^٢ = \frac{١}{ن} (ن_١ ع_١^٢ + ن_٢ ع_٢^٢ + ن_١ ف_١^٢ + ن ف_٢^٢)$$

حيث $ع^{2}$: تباين المجموعة الكلية (المكونة من المجموعتين ١ ، ٢)

ن : عدد حالات المجموعة الكلية .

$ن_{1}$: عدد حالات المجموعة الأولى .

$ن_{2}$: عدد حالات المجموعة الثانية .

$ف_{1}$: الفرق بين متوسط المجموعة الأولى والمتوسط العام للمجموعة الكلية

$ف_{2}$: الفرق بين متوسط المجموعة الثانية والمتوسط العام للمجموعة الكليـــة

واذا ضربنا حدي المعادلة في ن تصبح :

$$ن ع^{2} = ن_{1} ع_{1}^{2} + ن_{2} ع_{2}^{2} + ن_{1} ف_{1}^{2} + ن_{2} ف$$

ويلاحظ أن هذه المعادلة تحلل مجموع المربعات (مربعات فروق القيم عن المتوسط العام) الى قسمين :

أولا : $ن_{1} ع_{1}^{2} + ن_{2} ع_{2}^{2}$ وهذا المقدار هو مجموع المربعات داخل المجموعتين أي مربعات الفروق الموجودة بين كل قيمة ومتوسط المجموعة التي تنتمي اليها .

ثانيا : $ن_{1} ف_{1}^{2} + ن_{2} ف_{2}^{2}$ وهو المجموع المرجح Weighed لمربعات الفروق بين متوسط كل مجموعة والمتوسط العام .

ومن الطبيعي أن كلا من الجزئين يسهم في التباين العام بقدر يختلف تبعا لطبيعة المجموعات وانسجامها أو اختلافها بعضها عن بعض . فان كان متوسط المجموعات المكونة للمجموعة الكلية واحدا فان التباين الكلي يرجع الى التباين الداخلي في المجموعات فقط ، وذلك لأن قيمتي $ف_{1}$ و $ف_{2}$ في المعادلة السابقة تصير صفرا . وكلما زادت الفروق بين متوسطات المجموعات والمتوسط العام كلما قل تجانس المجموعة الكلية .

فكأن درجة تجانس المجموعة يتوقف على النسبة بين نصيب القسمين السابقين من التباين . ولتوضيح ذلك نفترض ثلاث مجموعات تتكون كل منها من خمسة أطفال أعمارهم كالآتي :

	مجموعة (أ)		مجموعة (ب)		مجموعة (ج)		
	٦		٤		٦		
	٨		٥		٨		
	٧		٧		٥		
	٧		٤		٥		
المجموع	٢٨	+	٢٠	+	٢٤	=	٧٢
المتوسط	٧		٥		٦	=	٦
					المتوسط العام		

ومن هذه القيم الاثني عشر يمكن حساب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط العام كما يلي :

[صفر + (٢)^٢ + (١)^٢ + (١)^٢] [(– ٢)^٢ + (– ١)^٢ + (١)^٢

(– ٢)^٢] + (صفر + (٢)^٢ + (– ١)^٢ + (– ١)^٢] + ٢٢

ر مجموع مربعات انحرافات المتوسطات عند المتوسط العام .

= [(٧ – ٦)^٢ + (٥ – ٦)^٢ + (٦ – ٦)^٢] × ٤

= ٢ × ٤ = ٨

مجموع مربعات انحرافات القيم داخل المجموعة عن متوسطها –

= [(– ١)^٢ + (١)^٢ + (صفر)^٢ + (صفر)^٢] + [(– ١)^٢ + (صفر)^٢ +

(٢)^٢ + (– ١)^٢] + (صفر)^٢ + (٢) + (– ١)^٢ + (– ١)^٢ = ١٤ .

ولمراجعة العمليات الحسابية التي أجريت نلاحظ أن ٢٢ = ٢ × ٤ + ١٤ أي أن مجموع مربعات انحراف القيم عن المتوسط العام = مجموع مربعات انحرافات المتوسطات عن المتوسط العام × عدد أفراد كل مجموعة + مجموع مربعات انحرافات القيم داخل المجموعات عن متوسطات المجموعات التابعة لها .

وقد ذكرنا أن مدى اتساق المجموعة الكلية يتوقف على النسبة بين (التباين بين المجموعات) و (التباين داخل المجموعات) فان كانت النسبة كبيرة دل ذلك على عدم تجانس المجموعة الكلية .

ولكي نحصل على التباين من مجموعات المربعات التي حسبناها ينبغي أن نقسم كل مجموع على عدد درجات الحرية في كل حالة .

فدرجات الحرية لمجموع مربعات انحرافات القيم عن المتوسط العام

= عدد القيم كلها – ١ = ١٢ – ١ = ١١

ودرجات الحرية لمجموع مربعات انحرافات المتوسطات عن المتوسط العام

= عدد المتوسطات أي عدد المجموعات – ١ = ٣ – ١ = ٢

ودرجات الحرية لمجموع انحرافات القيم داخل المجموعات

= مجموع درجات الحرية للمجموعات كل على حدة .

$= (ن_{١} - ١) + (ن_{٢} - ١) + (ن_{٣} - ١)$

$= ن_{١} + ن_{٢} + ن_{٣} - ٣$

ويلاحظ أيضا أن عدد درجات الحرية في الحالة الأولى = مجموع درجات الحرية في الحالتين الثانية والثالثة ويمكن أن نضع النتيجة في الجدول الآتي :



المصـــدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات(التباين)
بين المجموعات	٢	٨	٤,٠٠
داخل المجموعات	٩	١٤	١,٥٦
المجمـــوع	١١	٢٢	

جدول (٩٤) تحليل التباين لقيم ثلاث مجموعات

وقد أطلق اسم F Ratio ونسميها « نسبة ف » على النسبة بين التباين بين المجموعات والتباين داخل المجموعات . ووضع Snedecor جدولا لقيمها التي تكون لها دلالة احصائية عند نسبتي ٠,٠٥ ، ٠,٠١ ، ولاستخدام هذا الجدول يلزمنا معرفة درجات الحرية لكل من حدي النسبة . ونظرا لأن القيمة الصغرى من التباين تقابلها درجات حرية عددها ٩ في المثال السابق نبحث في الجدول عن العامود تحت الرقم ٢ والصف الذي رقمه ٩ (فأرقام الأعمدة هي الخاصة بدرجات الحرية المقابلة لأكبر جزء من التباين ، وأرقام الصفوف هي الخاصة بدرجات الحرية المقابلة لجزء التباين الأصغر . والجزءان في هذا المثال هما ٤ ، ١.٥٦) وبالرجوع الى الجدول نجد أن قيمة « نسبة ف » ذات الدلالة عند نسبة احتمال ٠,٠٥ هي ٤.٢٦ ، وعند ٠.٠١ هي ٨,٠٢ أي أن قيمة «ف» في هذا المثال ليست لها دلالة عند النسبتين .

ومعنى هذا أن التباين بين المجموعات وبعضها لا يزيد عن التباين داخل المجموعات بنسبة كبيرة تجعلنا نشك في تناسق المجموعة الكلية المتكونة منها ، أي أننا نستطيع أن نقول أن هذه المجموعات الثلاثة قد أخذت كعينات من مجتمع أصلي واحد ، وبمعنى آخر أننا نستطيع أن نقبل الفرض الصفري .

ويكون الاستنتاج الأخير سهلا في حالة عدم دلالة الفروق بين المجموعات لأن هذا الاستنتاج يتضمن عدم وجود فرق جوهري بين أي مجموعتين من هذه المجموعات الثلاث ، أما اذا كان هناك فروق جوهرية بين أي مجموعتين فان تحليل التباين سيوضح أن المجموعات كلها لم تأت من مجتمع أصلي واحد وتكون نسبة «ف» ذات دلالة احصائية واليك المثال الآتي لتوضيح هذه الحالة .

طبق اختبار تحصيلي على عينة من كل من أربعة فصول دراسية فكانت الدرجات كما هي مبينة فيما يلي :

ن ٢	ن ١ درجات الحرية											
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	١٦١ ٤,٠٥٢	٢٠٠ ٤,٩٩٩	٢١٦ ٥.٤٠٣	٢٢٥ ٥,٦٢٥	٢٣٠ ٥,٧٦٤	٢٣٤ ٥,٨٥٩	٢٣٧ ٥.٩٢٨	٢٣٩ ٥,٩٨١	٢٤١ ٦.٠٢٢	٢٤٢ ٦.٠٥٦	٢٤٣ ٦.٠٨٢	٢٤٤ ٦.١٠٦
٢	١٨,٥١ ٩٨,٤٩	١٩,٠٠ ٩٩,٠١	١٩,١٦ ٩٩,١٧	١٩,٢٥ ٩٩.٢٥	١٩,٣٠ ٩٩.٣٠	١٩.٣٣ ٩٩.٣٣	١٩.٣٦ ٩٩.٣٤	١٩.٣٧ ٩٩.٣٦	١٩.٣٨ ٩٩.٣٨	١٩.٣٩ ٩٩.٤٠	١٩.٤٠ ٩٩.٤١	١٩.٤١ ٩٩.٤٢
٣	١٠.١٣ ٣٤.١٢	٩.٥٥ ٣٠,٨١	٩.٢٨ ٢٩,٤٦	٩.١٢ ٢٨.٧١	٩.٠١ ٢٨,٢٤	٨.٩٤ ٢٧,٩١	٨.٨٨ ٢٧.٦٧	٨.٨٤ ٢٧.٤٩	٨.٨١ ٢٧.٣٤	٨.٧٨ ٢٧.٢٣	٨.٧٦ ٢٧.١٣	٨.٧٤ ٢٧.٠٥
٤	٧.٧١ ٢١.٢٠	٦,٩٤ ١٨,٠٠	٦,٥٩ ١٦,٦٩	٦.٣٩ ١٥,٩٨	٦.٢٦ ١٥,٥٢	٦.١٦ ١٥,٢١	٦.٠٩ ١٤.٩٨	٦.٠٤ ١٤.٨٠	٦.٠٠ ١٤.٦٦	٥.٩٦ ١٤.٥٤	٥,٩٣ ١٤,٤٥	٥.٩١ ١٤,٣٧
٥	٦.٦١ ١٦.٢٦	٥,٧٩ ١٣.٢٧	٥.٤١ ١٢,٠٦	٥,١٩ ١١,٣٩	٥,٠٥ ١٠,٩٧	٤,٩٥ ١٠,٦٧	٤.٨٨ ١٠.٤٥	٤.٨٢ ١٠.٢٧	٤.٧٨ ١٠.١٥	٤.٧٤ ١٠.٠٥	٤.٧٠ ٩.٩٦	٤.٦٨ ٩.٩٨
٦	٥.٩٩ ١٣.٧٤	٥,١٤ ١٠.٩٢	٤.٧٦ ٩.٧٨	٤.٥٣ ٩.١٥	٤.٣٩ ٨,٧٥	٤.٢٨ ٨,٤٧	٤.٢١ ٨.٢٦	٤.١٠ ٨.١٠	٤.١٦ ٧.٩٨	٤.٠٦ ٧.٨٧	٤.٠٣ ٧.٧٩	٤.٠٠ ٧.٧٢
٧	٩.٥٩ ١٢.٢٥	٤.٧٤ ٩.٥٥	٤.٣٥ ٨.٤٥	٤.١٢ ٧.٨٥	٣.٩٧ ٧.٦٤	٣,٨٧ ٧,١٩	٣,٧٩ ٧,٠٠	٣.٧٣ ٦.٨٤	٣.٦٨ ٦.٧١	٣.٦٣ ٦.٦٢	٣.٦٠ ٦.٥٤	٣.٥٧ ٦.٤٧

٨	٥,٣٢ ١١,٢٦	٤,٤٦ ٨,٦٥	٤,٠٧ ٧,٥٩	٣,٨٤ ٧,٠١	٣,٦٩ ٦,٦٣	٣,٥٨ ٦,٣٧	٣,٥٠ ٦,١٩	٣,٤٤ ٦,٠٣	٣,٣٩ ٥,٩٩	٣,٣٤ ٥,٨٢	٣,٣١ ٥,٧٤	٣,٢٨ ٥,٦٧
٩	٥,١٢ ١٠,٥٦	٤,٢٦ ٨,٠٢	٣,٨٦ ٦,٩٩	٣,٦٣ ٦,٤٣	٣,٤٨ ٦,٠٦	٣,٣٧ ٥,٨٠	٣,٢٩ ٥,٦٢	٢,٢٣ ٥,٤٧	٣,١٨ ٥,٣٥	٣,١٣ ٥,٢٦	٣,١٠ ٥,١٨	٣,٠٧ ٥,١١
١٠	٤,٩٦ ١٠,٠٤	٤,١٠ ٧,٥٦	٣,٧١ ٦,٥٥	٣,٤٨ ٥,٩٩	٣,٣٣ ٥,٦٤	٣,٢٢ ٥,٣٩	٣,١٤ ٥,٢١	٣,٠٧ ٥,٠٦	٣,٠٢ ٤,٩٥	٢,٩٧ ٤,٨٥	٢,٩٤ ٤,٧٨	٢,٩١ ٤,٧١
١١	٤,٨٤ ٩,٦٥	٣,٩٨ ٧,٢٠	٣,٥٩ ٦,٢٢	٣,٣٦ ٥,٦٧	٣,٢٠ ٥,٣٢	٣,٠٩ ٥,٠٧	٣,٠١ ٤,٨٨	٢,٩٠ ٤,٧٤	٢,٩٦ ٤,٦٣	٢,٨٦ ٠,٥٤	٢,٨٢ ٤,٤٦	٢,٧٩ ٤,٤٠
١٢	٤,٧٥ ٩,٣٣	٣,٨٨ ٦,٩٣	٣,٤٩ ٥,٩٥	٣,٢٦ ٥,٤١	٣,١١ ٥,٠٦	٣,٠١ ٤,٨٢	٢,٩٢ ٤,٦٥	٢,٨٥ ٤,٥٠	٢,٨٠ ٤,٣٩	٢,٧٦ ٤,٣٠	٢,٧٢ ٤,٢٢	٢,٦٩ ٤,١٦
١٤	٤,٦٠ ٨,٨٦	٣,٧٤ ٦,٥١	٣,٣٤ ٥,٥٦	٣,١١ ٥,٠٣	٢,٩٦ ٤,٦٩	٢,٨٥ ٤,٤٦	٢,٧٧ ٤,٢٨	٢,٧٠ ٤,١٤	٢,٦٥ ٤,٠٣	٢,٦٠ ٣,٩٤	٢,٥٦ ٣,٨٦	٢,٥٣ ٣,٨٠

التبـــاين الأكبر

ن ٢		٥٠٠	٢٠٠	١٠٠	٧٥	٥٠	٤٠	٣٠	٢٤	٢٠	١٦	١٤
١	٢٥٤ ٦,٣٦٦	٢٥٤ ٦.٣٦١	٢٥٤ ٦.٣٥٢	٢٥٣ ٦.٣٣٤	٢٥٣ ٦.٣٣٤	٢٥٢ ٦.٣٠٣	٢٥١ ٦.٢٨٦	٢٥٠ ٦.٢٥٨	٢٤٩ ٦,٢٣٤	٢٤٨ ٦,٢٠٨	٢٤٦ ٦.١٦٩	٢٤٥ ٦.١٤٣
٢	١٩.٥١ ٩٩.٥٠	١٩.٥٠ ٩٩.٥٠	١٩.٤٩ ٩٩.٤٩	١٩.٤٩ ٩٩.٤٩	١٩.٤٨ ٩٩.٤٩	١٩.٤٧ ٩٩.٤٨	١٩.٤٧ ٩٩.٤٨	١٩.٤٦ ٩٩.٤٧	١٩.٤٥ ٩٩,٤٦	١٩:٤٤ ٩٩.٤٥	١٩.٤٣ ٩٩.٤٤	١٩,٤٢ ٩٩,٤٣
٣	٨,٥٣ ٢٦.١٢	٨.٥٤ ٢٦.١٤	٨.٥٤ ٢٦.١٨	٨.٥٦ ٢٦.٢٣	٨.٥٧ ٢٦.٣٧	٨.٥٨ ٢٦.٣٥	٨.٦٠ ٢٦.٤١	٨.٦٣ ٢٦.٥١	٨,٦٤ ٢٦,٦٠	٨,٦٦ ٢٦,٦٩	٨.٦٩ ٢٦.٨٣	٨,٧١ ٢٦,٩٢
٤	٥,٦٣ ١٣.٤٦	٥.٦٤ ١٣.٤٨	٥.٦٥ ١٣.٥٢	٥.٦٦ ١٣.٥٧	٥.٦٨ ١٣.٦١	٥.٧٠ ١٣.٦٩	٥.٧١ ١٣.٧٤	٥.٧٤ ١٣.٨٣	٥,٧٧ ١٣,٩٣	٥,٨٠ ١٤.٠٢	٥,٨٤ ١٤.١٥	٥.٨٧ ١٤,٢٤
٥	٤,٣٦ ٩.٠٢	٤.٣٧ ٩.٠٤	٤.٣٨ ٩.٠٧	٤.٤٠ ٩.١٣	٤.٤٢ ٩.١٧	٤:٤٤ ٩.٢٤	٤.٤٦ ٩,٢٩	٤.٥٠ ٩.٣٨	٤.٥٣ ٩,٤٧	٤.٥٦ ٩,٥٥	٤.٦٠ ٩.٦٨	٤,٦٤ ٩.٧٧
٦	٣,٦٧ ٦,٨٨	٣.٦٨ ٦.٩٠	٣.٦٩ ٦.٩٤	٣.٧١ ٦.٩٩	٣,٧٢ ٧.٠٢	٣.٧٥ ٧,٠٩	٣,٧٧ ٧,١٤	٣.٨١ ٧.٢٣	٣.٨٤ ٧,٣١	٣.٨٧ ٧.٣٩	٣,٩٢ ٧,٥٢	٣.٩٦ ٧,٦٠
٧	٣.٢٣ ٥.٦٥	٣.٢٤ ٥.٦٧	٣.٢٥ ٥.٧٠	٣,٢٨ ٥.٧٥	٣.٢٩ ٥,٧٨	٣,٣٢ ٥.٨٥	٣.٣٤ ٥.٩٠	٣.٣٨ ٥,٩٨	٣.٤١ ٦,٠٧	٣.٤٤ ٦.١٥	٣.٤٩ ٦.٢٧	٣,٥٢ ٦,٣٥

٨	٢,٩٣ ٤.٨٦	٢,٩٤ ٤.٨٨	٢,٩٦ ٤.٩١	٢,٩٨ ٤.٩٦	٣.٠٠ ٥.٠٠	٣.٠٣ ٥.٠٦	٣,٠٥ ٥.١١	٣,٠٨ ٥.٢٠	٣.١٢ ٥.٢٨	٣.١٥ ٥.٣٦	٣.٢٠ ٥.٤٨	٣.٢٣ ٥.٥٦
٩	٢,٧١ ٤.٣١	٢.٧٢ ٤.٣٣	٢.٧٣ ٤.٣٦	٢.٧٦ ٤.٤١	٢.٧٧ ٤.٤٥	٢.٨٠ ٤.٥١	٢.٨٢ ٤.٥٦	٢.٨٦ ٤.٦٤	٢.٩٠ ٤.٧٣	٢.٩٣ ٤.٨٠	٢.٩٨ ٤,٩٢	٣.٠٢ ٥.٠٠
١٠	٢,٥٤ ٣.٩١	٢,٥٥ ٣,٩٣	٢,٥٦ ٣,٩٦	٢,٥٩ ٤.٠١	٢.٦٠ ٤.٠٥	٢,٦٤ ٤.١٢	٢.٦٧ ٤.١٧	٢,٧٠ ٤.٣٥	٢.٧٤ ٤.٣٣	٢.٧٧ ٤,٤١	٢.٨٢ ٤.٥٢	٢.٨٦ ٤.٦٠
١١	٢.٤٠ ٣,٦٠	٢,٤١ ٣,٦٢	٢,٤٢ ٣.٦٦	٢.٤٥ ٣,٧٠	٢,٤٧ ٣.٧٤	٢,٥٠ ٣,٨٠	٢.٥٣ ٣.٨٦	٢.٥٧ ٣.٩٤	٢.٦١ ٤.٠٢	٢,٦٥ ٤.١٠	٢.٧٠ ٤.٢١	٢.٧٤ ٤.٢٩
١٢	٢.٣٠ ٣,٣٦	٢,٣١ ٣.٣٨	٢.٣٢ ٣.٤١	٢.٣٥ ٣.٤٦	٢,٣٦ ٣.٤٩	٢.٤٠ ٣.٥٦	٢.٤٢ ٣,٦١	٢.٤٦ ٣.٧٠	٢.٥٠ ٣.٧٨	٢.٥٤ ٣,٨٦	٢.٦٠ ٣.٩٨	٢ ٦٤ ٤.٠٥
١٣	٢,١٣ ٣,٠٠	٢,١٤ ٣,٠٢	٢.١٦ ٣,٠٦	٢.١٩ ٣.١١	٢,٢١ ٣.١٤	٢.٢٤ ٣.٢١	٢.٢٧ ٣,٢٦	٢.٣١ ٣.٣٤	٢.٣٥ ٣.٤٣	٢.٣٩ ٣.٥١	٢.٤٤ ٣.٦٢	٢.٤٨ ٣.٧٠

ن ٢	ن ١ درجات الحريـــة											
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١٧	٤.٤٥ ٨.٤٠	٣,٥٩ ٦,١١	٣.٢٠ ٥.١٨	٢.٩٦ ٤.٦٧	٢.٨١ ٤.٣٤	٢.٧٠ ٤.١٠	٢.٦٢ ٣.٩٣	٢.٥٥ ٣.٧٩	٢.٥٠ ٣.٦٨	٢.٤٥ ٣.٥٩	٢.٤١ ٣.٥٢	٢,٣٨ ٣.٤٥
٢٠	٤.٣٥ ٨.١٠	٣.٤٩ ٥.٨٥	٣.١٠ ٤,٩٤	٢.٨٧ ٤.٤٣	٢.٧١ ٤.١٠	٢.٦٠ ٣.٨٧	٢.٥٢ ٣.٧١	٢.٤٥ ٣.٥٦	٢.٤٠ ٣.٤٥	٢.٣٥ ٣.٣٧	٢.٣٢ ٣.٣٠	٢.٢٨ ٣.٢٣
٢٤	٤.٢٦ ٧.٨٢	٣,٤٠ ٥,٦١	٣,٠١ ٤,٧٢	٢.٧٨ ٤.٢٢	٢.٦٢ ٣.٩٠	٢.٥١ ٣.٦٧	٢.٤٣ ٣.٥٠	٢.٣٦ ٣.٣٦	٢.٣٠ ٣.٢٥	٢.٢٦ ٣.١٧	٢.٢٢ ٣.٠٩	٢.١٨ ٣.٠٣
٣٠	٤,١٧ ٧.٥٦	٣,٣٢ ٥.٣٩	٢,٩٢ ٤.٥١	٢.٦٩ ٤.٠٢	٢.٥٣ ٣.٧٠	٢.٤٢ ٣,٤٧	٢,٣٤ ٣.٣٠	٢.٢٧ ٣.١٧	٢.٢١ ٣,٠٦	٢.١٦ ٢.٩٨	٢,١٢ ٢,٩٠	٢.٠٩ ٢.٨٤
٤٠	٤,٠٨ ٧.٣١	٣.٢٣ ٥.١٨	٢.٣٤ ٤.٣١	٢.٦١ ٣.٨٣	٢.٤٥ ٣.٥٢	٢.٣٤ ٣.٢٩	٢.٢٥ ٣.١٢	٢.١٨ ٢,٩٩	٢.١٢ ٢,٨٨	٢.٠٧ ٢.٨٠	٢.٠٤ ٢.٧٣	٢.٠٠ ٢,٦٦
٥٠	٤.٠٣ ٧,١٧	٣.١٨ ٥.٠٦	٢.٧٩ ٤.٢٠	٢.٥٦ ٣.٧٢	٢,٤٠ ٣.٤١	٢.٢٩ ٣.١٨	٢,٢٠ ٣,٠٢	٢.١٣ ٢.٨٨	٢.٠٧ ٢.٧٨	٢.٠٢ ٢.٧٠	١.٩٨ ٢.٦٢	١.٩٥ ٢.٥٦
٧٠	٣.٩٨ ٧.٠١	٣.١٣ ٤.٩٢	٢.٧٤ ٤,٠٨	٢.٥٠ ٣,٦٠	٢,٣٥ ٣,٢٩	٢,٢٣ ٣,٠٧	٢,١٤ ٢,٩١	٢,٠٧ ٢,٧٧	٢,٠١ ٢,٦٧	١,٩٧ ٢,٥٩	١,٩٣ ٢,٥١	١,٨٩ ٢,٤٥

١٠٠	٣,٩٤ ٦,٩٠	٣,٠٩ ٤,٨٢	٢,٧٠ ٣,٩٨	٢,٤٦ ٣,٥١	٢,٣٠ ٣,٢٠	٢,١٩ ٢,٩٩	٢,١٠ ٢,٨٢	٢,٠٣ ٢,٦٩	١,٩٧ ٢,٥٩	١,٩٢ ٢,٥١	١,٨٨ ٢,٤٣	١,٨٥ ٢,٣٦
١٥٠	٣,٩١ ٦,٨١	٣,٠٦ ٤,٧٥	٢,٦٧ ٣,٩١	٢,٤٣ ٣,٤٤	٢,٢٧ ٣,١٤	٢,١٦ ٢,٩٢	٢,٠٧ ٢,٧٦	٢,٠٠ ٢,٦٢	١,٩٤ ٢,٥٣	١,٨٩ ٢,٤٤	١,٨٥ ٢,٣٧	١,٨٢ ٢,٣٠
٢٠٠	٣,٨٩ ٦,٧٦	٣,٠٤ ٤,٧١	٢,٦٥ ٣,٨٨	٢,٤١ ٣,٤١	٢,٢٦ ٣,١١	٢,١٤ ٢,٩٠	٢,٠٥ ٢,٧٣	١,٩٨ ٢,٦٠	١,٩٢ ٢,٥٠	١,٨٧ ٢,٤١	١,٨٣ ٢,٣٤	١,٨٠ ٢,٢٨
٤٠٠	٣,٨٦ ٦,٧٠	٣,٠٢ ٤,٦٦	٢,٦٢ ٣,٨٣	٢,٣٩ ٣,٣٦	٢,٢٣ ٣,٠٦	٢,١٢ ٢,٨٥	٢,٠٣ ٢,٦٩	١,٩٦ ٢,٥٥	١,٩٠ ٢,٤٦	١,٨٥ ٢,٣٧	١,٨١ ٢,٢٩	١,٧٨ ٢,٢٣
١٠٠٠	٣,٨٥ ٦,٦٦	٣,٠٠ ٤,٦٢	٢,٦١ ٣,٨٠	٢,٣٨ ٣,٣٤	٢,٢٢ ٣,٠٤	٢,١٠ ٢,٨٢	٢,٠٢ ٢,٦٦	١,٩٥ ٢,٥٣	١,٨٩ ٢,٤٣	١,٨٤ ٢,٣٤	١,٨٠ ٢,٢٦	١,٧٦ ٢,٢٠
	٣,٨٤ ٦,٦٤	٢,٩٩ ٤,٦٠	٢,٦٠ ٣,٧٨	٢,٣٧ ٣,٣٢	٢,٢١ ٣,٠٢	٢,٠٩ ٢,٧٠	٢,٠١ ٢,٦٤	١,٩٤ ٢,٥١	١,٨٨ ٢,٤١	١,٨٣ ٢,٣٢	١,٧٩ ٢,٢٤	١,٧٥ ٢,١٨
التباين الأكبر												
١٤	١٦	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠		٢ ل
٢,٣٣ ٣,٣٥	٢,٢٩ ٣,٢٧	٢,٢٣ ٣,١٦	٢,٢٩ ٣,٠٨	٢,١٥ ٣,٠٠	٢,١١ ٢,٩٢	٢,٠٨ ٢,٨٦	٢,٠٤ ٢,٧٩	٢,٠٢ ٢,٧٦	١,٩٩ ٢,٧٠	١,٩٧ ٢,٦٧	١,٩٦ ٢,٦٥	١٧

٢٠	١.٨٤ ٢.٤٢	١.٨٥ ٢.٤٤	١.٨٧ ٢.٤٧	١.٩٠ ٢.٥٣	١.٩٢ ٢.٥٦	١.٩٦ ٢.٦٣	١.٩٩ ٢.٦٩	٢.٠٤ ٢.٧٧	٢.٠٨ ٢.٨٦	٢.١٢ ٢.٩٤	٢.١٨ ٣.٠٥	٢.٢٣ ٣.١٣
٢٤	١.٧٣ ٢.٢١	١.٧٤ ٢.٢٣	١.٧٦ ٢.٢٧	١.٨٠ ٢.٣٣	١.٨٢ ٢.٣٩	١.٨٦ ٢.٤٤	١.٨٩ ٢.٤٩	١.٩٤ ٢.٥٨	١.٩٨ ٢.٦٦	٢.٠٢ ٢.٧٤	٢.٠٩ ٢.٨٥	٢.١٣ ٢.٩٣
٣٠	١.٦٢ ٢.٠١	١.٦٤ ٢.٠٣	١.٦٦ ٢.٠٧	١.٦٩ ٢.١٣	١.٧٢ ٢.١٦	١.٧٦ ٢.٢٤	١.٧٩ ٢.٢٩	١.٨٤ ٢.٣٨	١.٨٩ ٢.٤٧	١.٩٣ ٢,٥٥	١.٩٩ ٢,٦٦	٢.٠٤ ٢.٧٤
٤٠	١.٥١ ١.٨١	١.٥٣ ١.٨٤	١.٥٥ ١.٨٨	١.٥٩ ١.٩٣	١,٦١ ١.٩٧	١.٦٦ ٢.٠٥	١.٦٩ ٢.١١	١.٧٤ ٢.٢٠	١.٧٩ ٢.٢٩	١.٨٤ ٢.٣٧	١.٩٠ ٢.٤٩	١,٩٥ ٢.٥٦
٥٠	١.٤٤ ١.٦٨	١.٤٦ ١.٧١	١.٤٨ ١.٧٦	١.٥٣ ١.٨٢	١.٥٥ ١.٨٦	١.٦٠ ١.٩٤	١.٦٣ ٢.٠٠	١.٦٩ ٢.١٠	١.٧٤ ٢.١٨	١.٧٨ ٢.٢٦	١.٩٥ ٢.٣٩	٢.٩٠ ٢.٤٦
٧٠	١.٣٥ ١.٥٣	١.٣٧ ١.٥٦	١.٤٠ ١,٦٢	١.٤٥ ١.٦٩	١.٤٧ ١,٧٤	١.٥٣ ١.٨٢	١.٥٦ ١.٨٨	١.٦٢ ١.٩٨	١.٦٧ ٢.٠٧	١.٧٢ ٢.١٥	١.٧٩ ٢,٢٨	١.٨٤ ٢,٣٥
١٠٠	١.٢٨ ١.٤٣	١.٣٠ ١.٤٦	١.٣٤ ١.٥١	١.٣٩ ١.٥٩	١.٤٢ ١.٦٤	١.٤٨ ١.٧٣	١.٥١ ١.٧٩	١.٥٧ ١.٨٩	١,٦٣ ١.٩٨	١.٦٨ ٢.٠٦	١.٧٥ ٢.١٩	١.٧٩ ٢.٢٦
٥٠٠	١.٢٢ ١.٣٣	١.٢٥ ١.٣٧	١.٢٩ ١.٤٣	١.٣٤ ١.٥١	١.٣٧ ١,٥٦	١.٤٤ ١.٦٦	١.٤٧ ١.٧٢	١.٥٤ ١.٨٣	١,٥٩ ١,٩١	١.٦٤ ٢.٠٠	١,٧١ ٢.١٢	١,٧٦ ٢.٣٠

٢٠٠	١,١٩ ١,٢٨	١,٢٢ ١,٣٣	١,٢٦ ١,٣٩	١,٣٢ ١,٤٨	١,٣٥ ١,٥٣	١,٤٢ ١,٦٢	١,٤٥ ١,٦٩	١.٥٢ ١,٧٩	١,٥٧ ١.٨٨	١,٦٢ ١,٩٧	١,٦٩ ٢,٠٩	١,٧٤ ٢,١٧
٤٠٠	١,١٣ ١,١٩	١,١٦ ١,٢٤	١,٢٢ ١,٣٢	١,٢٨ ١,٤٢	١,٣٢ ١,٤٧	١,٣٨ ١,٥٧	١,٤٢ ١,٦٤	١,٤٩ ١,٧٤	١,٥٤ ١,٨٤	١,٦٠ ١,٩٢	١,٦٧ ٢,٠٤	١,٧٢ ٢,١٢
١٠٠٠	١,٠٨ ١,١١	١,١٣ ١,١٩	١,١٩ ١,٢٨	١,٢٦ ١,٣٨	١,٣٠ ١,٤٤	١,٣٦ ١,٥٠	١,٤٢ ١,٦١	١,٤٧ ١,٧١	١.٥٣ ١,٨١	١,٥٨ ١.٨٩	١,٦٥ ٢,٠١	١,٧٠ ٢,٠٩
	١,٠٠ ١,٠٠	١,١١ ١,١٥	١,١٧ ١,٢٥	١,٢٤ ١,٣٦	١,٢٨ ١,٤١	١,٣٥ ١,٥٢	١,٤٠ ١,٥٩	١,٤٦ ١,٦٩	١,٥٢ ١,٧٩	١,٥٧ ١.٨٧	١,٦٤ ١,٩٩	١,٦٩ ٢,٠٧

جدول (٩٥) ت م ف المقابلة لدرجات الحرية المختلفة (الأعمدة لدرجات الحرية للتباين الأكبر عند نسبتي ٠,٠٥ (العدد العلوي في كل خانة) و ٠,٠١ (العدد السفلي في كل خانة) .

	فصل(أ)	فصل (ب)	فصل (ج)	فصـــل (د)
	٢٢	٣٨	٢٥	٢٥
	١٦	٤٢	٣٢	٢٢
	٢٥	٣٥	٢٧	٢١
	٣٥	٣٦	٢٩	١٩
	٢٠	٣٧	٤١	٢٢
	٣٤	٤٠	٣٤	٢٣
	٣٨	٤١	٣٧	٤٤
	٢٢	٣٩	٢٨	٢٠
	٣٧	٣٥	٣٥	٢٧
	٢١	٣٧	٤٢	١٧
المجموع	٢٧٠	٣٨٠	٣٣٠	٢٢٠
المتوسط	٢٧	٣٨	٣٣	٢٢

جدول (٩٦) درجات أربعة فصول في اختبار تحصيلي

ويكون المتوسط العام = $\frac{٢٢ + ٣٣ - ٣٨ - ٢٧}{٤}$ (نظرا لأن العدد متســاوي في المجموعات) .

$= \frac{١٢٠}{٤} = ٣٠$

مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط العام .

[٦٤ + ١٩٦ + ٢٥ + ٢٥ + ١٠٠ + ١٦ + ٦٤ + ٦٤ + ٤٩ + ٨١)]+

[٦٤ + ١٤٤ + ٢٥ + ٣٦ + ٤٩ + ١٠٠ + ١٢١ + ٨١ + ٢٥ + ٤٩)]+

[٢٥ + ٤ + ٩ + ١ + ١٢١ + ١٦ + ٤٩ + ٤ + ٢٥ + ١٤٤] +

[٢٥ + ٦٤ + ٨١ + ١٢١ + ٦٤ + ٤٩ + ٣٦ + ١٠٠ + ٩ + ١٦٩] =

٢٤٩٤ = ٧١٨ + ٣٩٨ + ٦٩٤ + ٦٨٤

مجموع انحرافات المتوسط عن المتوسط العام =

١٠ (٩ + ٦٤ + ٩ + ٦٤) = ١٤٦٠

ومجموع انحرافات القيم داخل المجموعة عن متوسطها =

(٢٥ = ١٢١ + ٤ + ٦٤ + ٤٩ + ٤٩ + ١٢١ + ٢٥ + ١٠٠ + ٣٦) +

(ــ + ١٦ + ٩ + ٤ + ١ +٤ + ٩ + ١ + ٩ + ١) +

(٦٤ + ١ + ٣٦ + ١٦ + ٦٤ + ١ + ١٦ + ٢٥ + ٤ + ٨١) +

(٩ + ــ + ١ + ٩ + ــ + ١ + ٤ + ٤ + ٢٥ + ٢٥) =

٥٩٤ + ٥٤ + ٣١٨ + ٧٨ = ١٠٣٤

ودرجات الحرية للمجموع الأول = ٤٠ ــ ١ = ٣٩

وللمجموع الثاني = ٤ ــ ١ = ٣

وللمجموع الثالث = ٤ (١٠ ــ ١) = ٣٦

ويكون جدول التحليل كما يلي :

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع مربعات التباين
بين المجموعات	٣	١٤٦٠	٤٨٦,٦٧
داخل المجموعات	٣٦	١٠٣٤	٢٨,٨٢
المجموع	٣٩	٢٤٩٤	

جدول (٩٧) تحليل تباين درجات اربعة فصول في اختبار تحصيلي

ومن ذلك تكون ف = $\frac{٤٨٦,٦٧}{٢٨.٧٢}$ = ١٦,٩٥

واذا رجعنا الى جدول (ف) مع ملاحظة أن درجات الحرية المقابلة للتباين الأكبر تساوي ٣ ، وأن درجات الحرية المقابلة للتباين الأصغر هي ٢٦ (أي في عامود ٣ القيمة المقابلة للعدد ٣٦ نجد أن قيمة ف ذات الدلالة عند نسبة ٠,٠٥ تنحصر بين ٢,٨٤ ، ٢,٩٢ وعند نسبة ٠,٠١ بين ٤,٣١ ، ٤,٥١ ، أي أن نسبة « ف » هنا ذات دلالة احصائية فهي

أكبر من القيمة اللازمة عند نسبتي ٠٫٠٥ ، ٠٫٠١ ويهم الباحث في كثير من الأحيان معرفة أي المجموعات هي التي سببت زيادة للتباين بين المجموعات عن التباين داخل المجموعة لهذه الدرجة . وفي هذه الحالة يضطر الى حساب معامل « ت » بين كل مجموعتين أي حساب ٦ معاملات في هذه الحالة بين ١ و ٢ ، ١ و ٣ ، ١ و ٤ ، ٢ و ٣ ، ٢ و ٤ ، ٣ و ٤ .

وقيم « ت » في المثال الحالي ومدى دلالتها موضحة في الجدول الآتي :

الفصـــول	ت	دلالة عند ٠,٠٥	دلالة عند ٠,٠١
١ ، ٢	٤,١٠٤	نعم	نعم
١ ، ٣	١.٧٩	لا	لا
١ ، ٤	١.١٧	لا	لا
٢ ، ٣	٢,٤٤	لا	لا
٢ ، ٤	١٣,٢١	نعم	نعم
٣ ، ٤	٥,٣١	نعم	نعم

جدول (٩٨) قيم «ت» للمقارنة بين متوسطات المجموعات الأربعة

ونجد في هذا الجدول أن نصف عدد قيم « ت » لها دلالة احصائية عند نسبتي ٠,٠٥ ، ٠٫٠١ ومنه يتضح أن أكبر قيمة لمعامل « ت » بين الفصلين ٢ ، ٤ . والقيمة التالية بين الفصلين ٣ ، ٤ . ويمكننا من هذا الجدول أن نستنتج أن المجموعات الأربعة لا يمكن ضم درجاتها واعتبارها مجموعة واحدة ولكن قد نستطيع ضم درجات الفصلين ١ ، ٤ واعتبارها مجموعة واحدة وضم ٢ ، ٣ واعتبارها مجموعة أخرى .

أسئلة على الباب السادس

١ – قسمت مجموعة من التلاميذ الى مجموعتين متعادلتي القوة الدراسية تقريبا في بحث يهدف الى المقارنة بين طريقتين من طرق التدريس ، وفي نهاية السنة الدراسية كانت النتيجة الدراسية للمجموعتين كما يلي : –

رقم المجموعة	عددها	ناجحون	راسبون
(١)	٧٥	٦٠	٢٥
(٢)	١٣٠	٧٠	٦٠

اختبر ما اذا كان هناك فرق جوهري بين أثر كل من الطريقتين على نجاح التلاميذ ورسوبهم .

٢ –

فئات درجات الاختبار	تكرار المجموعة الأولى	تكرار المجموعة الثانية	تكرار المجموعة الثالثة
٣ –	٥	٣	٢
٦ –	١٤	١٦	٨
٩ –	١٤	٢٠	٢٢
١٢ –	٢٥	٢٢	٢٥
١٥ –	٢٧	٣٠	٤٢
١٨ –	٣٢	٣٤	٤٥
٢١ –	٣٤	٣٨	٤٠
٢٤ –	١٨	٢٩	٢٨
٢٧ –	١٢	٢٤	٣٠
٣٠ –	١٠	٢٠	٢٥
٣٣ –	٦	٩	١٧
٣٦ –	٣	٥	١٥
المجموع	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠

جدول (٩٩) جدول تكراري لبيان العلاقة بين ذكاء الابن ووظيفة الأب

٣ ـ في بحث لبيان العلاقة بين عمل الوالد وذكاء الابن أجري اختبار للذكاء على ثلاث مجموعات من الأطفال : المجموعة الأولى آباؤهم يعملون في مهن صناعية والمجموعة الثانية آباؤهم يعملون في مهن كتابية والثالثة في مهن فنية عالية . فكانت نتائج المجموعات الثلاثة كما هو مبين في الجدول التكراري السابق .

باستخدام اختبار « ت » بين ما اذا كان الفرق بين متوسط كل مجموعتين من المجموعات الثلاثة ذات دلالة احصائية .

٤ ـ عزفت خمس قطع موسيقية على مجموعة من ١٠٠ شخص ، وطلب منهم بيان أفضل هذه القطع الخمس فكان عدد الذين اختاروا كل قطعة كما يلي :

قطعة	أ	٢٣
قطعة	ب	١٥
قطعة	حـ	٢١
قطعة	د	١٧
قطعة	هـ	٢٤

اختبر ما اذا كان هناك فرق جوهري بين تفضيل المجموعة للقطع الخمس،

٥ ـ أجريت أربع اختبارات على ١٠٠ شخص فكانت معاملات الارتباط بين نتائج هذه الاختبارات الأربعة كما هو مبين في المصفوفة الآتية :

	اختبار (١)	(٢)	(٣)	(٤)
اختبار (١)	ــ	,٣٥	,٤٢	٠,٣٣
(٢)		ــ	,١٦	٠,٤٧
(٣)			ــ	٠,٥٤
(٤)				ــ

اختبر درجة دلالة هذه المعاملات الستة ، (المعامل المستخدم هو معامل بيرسون) بطريقتين مختلفتين .

٦ — الجدول التوافقي الآتي يبين العلاقة بين الاجابة على سؤالين مختلفين في الاستفتاء عن تربية الفتاة .

السؤال الأول / السؤال الثاني	موافق جدا	موافق	محايد	معارض	معارض بشدة	المجموع
موافق جدا	٣٥	٣٠	٢٥	١٠	١١	١١٠
موافق	٢٦	٢٦	١٢	١٤	١٢	٩٠
محايد	١٨	١٨	١٥	٩	١٠	٧٠
معارض	١٥	١٤	١٥	٢٦	٢٠	٩٠
معارض بشدة	١٦	١٢	٢٤	٢١	٢٧	١٠٠
المجموع	١١٠	١٠٠	٩٠	٨٠	٨٠	٤٦٠

جدول (١٠٠) جدول توافقي للعلاقة بين الاجابة عن سؤالين من استفتاء

احسب معامل التوافق بين هذين السؤالين عن طريق ايجاد قيمة « كا ٢ » لاستغلال المتغيرين كل عن الآخر .

٧ — ألقي زهر اللعب ١٠٠ مرة فكان تكرار وقوعه على الأرقام المختلفة كما يلي :

رقم الزهر	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكـــرار	١٥	٢٢	١٤	١٦	١٧	١٨

هل هذه التجربة تؤيد أم ترفض نظرية الاحتمالات (الصدفة) ؟

٨ — في مثال سابق بهـــذا الكتاب أربع مجموعات لتقديرات طول مستقيم طوله الحقيقي ١٠ سم . وقد عملت هذه التقديرات في الحالات الآتية :

عامل الواضــع	عامــل الاتجـــــاه
الثابت على اليمين .. الثابت على اليسار	الثابت أطول ـ الثابت أقصر

استخدم طريقة تحليل التباين لاختبار صحة الفرض الصفري « بأنه ليس هناك فرق جوهري بين هذه الحالات الأربع » .

٩ ـ أجري اختبار النزعة العصابية ،**Neuroticism** على مجموعتين من الأشخاص : احداهما تشتمل على أشخاص عاديين **Normals** والأخرى أشخاص غير عاديين **Abnormals** فكانت نتيجة المجموعتين في الاختبار كما يلي :

	عاديين	غير عاديين
المتوسط الحسابي	٢٥	٣٧
الانحراف المعياري	٦,٢٥	٦,٠٠
العـــدد	١٦٦	٢٦

اختبر مدى صحة **Validity** هذا الاختبار (أي قدرته على التمييز بين العاديين **وغير العاديين**) .



الباب السابع

التحليل العــاملي
Factor Analysis

= أهداف التحليل العاملي .

= الخطوات التجريبية التي أدت الى التحليل العاملي :

- معادلة الفروق الرباعية . Tetrad Difference Equation

= اكتشاف العوامل الطائفية . Group Factors

= الطرق العملية للتحليل العاملي : —

طريقة الجمع البسيط . Simple Summation Method

الطريقة المركزية . Centroid Method

طريقة العوامل الطائفية . Group Factor Method

طريقة العوامل الجمعية . Bi-Factor Method

= خــــاتمة .



أهداف التحليل العاملي :

من أهم الأهداف التي ترمي اليها المحاولات العلمية تنظيم الحقائق والمفهومات تنظيما يوضح ما بينها من علاقات ، أو تقسيمها على أساس ما بينها من أوجه التشابه والاختلاف . وقد نشطت عملية التقسيم والتنظيم منذ منتصف القرن الماضي فيما يتعلق بالظواهر الطبيعية Physical phenomena حيث يكون التقسيم واضحا محدودا وعند ما تحول اتجاه التقسم العلمي للظواهر الحيوية Biological اتضح أن التقسيم المحدد لا يتمثل في الأنواع المختلفة . بل وجد أن السمات والصفات البيولوجية يتداخل بعضها مع بعض فهي سمات مرتبطة لا يمكن فصلها واقترح جولتن Galton طريقة معامل الارتباط كوسيلة عددية لوصف هذا التداخل . فاذا اتجه التقسيم بعد ذلك الى السمات النفسية أو الظواهر الاجتماعية كانت صعوبة التقسيم أصعب بكثير نظرا لتعقد الصورة وتشابك العوامل التي تكونها تشابكا يجعل من العسير على التجارب العملية وحدها — مهما أحكمت — القيام بعملية التقسيم والتنظيم دون مساعدة الوسائل الاحصائية ، ومن أهم الوسائل الاحصائية التي تهدف لذلك في ميدان القياس النفسي والاجتماعي الطريقة المسماة « التحليل العاملي » حيث يبدأ الباحث بعدد من القدرات العقلية أو السمات النفسية مثلا ، وينتهي من هذا التحليل الى تقسيم هذه القدرات الى مجموعات يرتبط أفرادها تبعا لعدد من الأسس هي التي يطلق عليها العوامل . كما يتضح من الشكل التوضيحي الآتي :

القـــدرات	العامل (١)	(٢)	(٣)
أ	×		
ب		×	
جـ	×		
د			×
هـ		×	
و			×

جدول (١٠٣) التحليل العاملي كوسيلة من وسائل التقسيم العلمي

وبالرغم من أن الباحث المدرب قد ينجح في بعض الأحيان في اجراء تقسيم كهذا بناء على فحصه ومعلوماته الفنية الا أن هذا التقسيم يكون بمثابة فرض يحتاج الى التحقيق العلمي . وكثيرا ما يعدل في هذا التحقيق أو يلغيه . والتحليل العاملي هو وسيلة هذا التحقيق .

وينظر بعض الباحثين الى طريقة التحليل العاملي على أنها وسيلة للتبسيط العلمي [1] ، Scientific Simplification فهو يحول عددا كبيرا من الأوصاف والسمات المعقدة المترابطة الى عدد قليل من العوامل غير المترابطة (وخاصة في حالة العوامل المتعامدة التي سيأتي ذكرها فيما بعد) فبدلا من أن نميز فردا ما عن غيره على أساس درجاته مثلا في عشرين اختبارا نستطيع عن طريق تحليل هذه الاختبارات الى عدد محدد من القدرات تمييزه على أساس عدد قليل من العوامل .

وقد حاول الباحثون في القياس العقلي خلال النصف قرن الأخير الوصول الى المكونات الأساسية للحياة العقلية ، أو الأبعاد الأولية التي ينسب اليها كل وصف نفس لأي فرد . فكما أن الطول أو العرض والارتفاع ثلاثة أبعاد أساسية نستطيع بها أن نحدد شكل الشيء وحجمه ، فكذلك يعمل الباحثون الى الوصول الى ما يقابل هذه الأبعاد في الميدان النفسي ، والتحليل العاملي هو الوسيلة التي يأمل الباحثون عن طريقها أن يصلوا الى هذا الهدف ، حتى يستطيعوا استخدامه بعد ذلك في الأغراض العملية التطبيقية في الحياة كالتوجيه التعليمي والتوجيه المهني .

وقد كان سبيرمان يرى في التحليل العاملي أداة لاكتشاف العوامل الأساسية المسببة للعمليات العقلية Causal Mechanisms والقوانين العامة التي تسير عليها . ومن هذه النظرة العامة التي تجعل العام يهدف الى اكتشاف المسببات قد تغيرت أخيرا بعد أن تشكك العلم كثيرا في صحة العلاقات السببية .

وللتحليل العاملي عدا هذه الأهداف الأساسية التي ذكرت أغراض أخرى تختلف باختلاف البحث ووجهة نظر الباحث . فقد يكون وسيلة من وسائل التحقق من معامل صدق Validity اختبار معين حيث يجمع الباحث بينه وبين اختبارات أخرى تقيس السمة أو العامل الذي وضع الاختبار لقياسها مع بعض الاختبارات الأخرى ، ويكون نمط تجمع هذه الاختبارات وتقسيمها دليلا على صدق الاختبار . وقد يمتد البحث الى

---

(١) Wundt, W. Principles of Physiology, Psychology, 1904.

حصر جميع العوامل الأساسية الداخلة في الاختبار ودرجة تشبعه بكل عامل من هذه العوامـــل .

وقد تطبق هذه الطريقة على العلاقة بين الأشخاص ويكون الهدف هنا تقسيم الأشخاص المختبرين لاكتشاف الأنماط Types التي تصلح أساسا لهذا التقسيم وما يشتمل عليه كل نمط من عوامل .

الخطوات التجريبية التي أدت الى التحليل العاملي :

اذا تتبعنا تقسيم العمليات العقلية وجدنا آثار هذا التقسيم في آراء فلاسفة اليونـــان كأرسطو وأفلاطون ثم في نظريات الملكات المعروفة . فقد كانت هذه النظرية تقوم على تقسيم العمليات العقلية الى ملكتين عامتين : ملكة المعرفة وملكة الرغبة . كما هو موضح في التقسيم الآتي :

ملكة المعرفة	ملكة الرغبة
١ ـــ الملكة السفلى للمعرفة :	١ ـــ الملكة السفلى للرغبة :
الاحساس ـــ التخيل ـــ ملكة الشعر ـــ التذكر .	السرور والضيق ـــ الحساسية ـــ الانفعـــالات .
٢ ـــ الملكة العليا للمعرفة	٢ ـــ الملكة العليا للرغبة :
الانتباه ـــ الفهم ـــ التفكير	الرغبة والارادة (التأكيد والنفي) الحريـــــة .

ولكن التاريخ الحقيقي للتحليل العاملي يبدأ منذ أن بدأ القياس العقلي يتخذ اتجاها عمليا تجريبيا على يد جولتن [١] ، فقد وجد من بحوثه عن الانسان والحيوان والنبات أن من بين أفراد الفصيلة الواحدة حتى الخصائص المختلفة ترتبط فيها ارتباطا موجبا .

كما استخدم وسلر [٢] تحت اشراف ماك كين ُكاتل طريقة معامل الارتباط التي أوجدها بيرسون للتحقق من تمييز القدرة العامة General Ability عن القدرة الخاصة Specific Ability وقد وجد من نتيجة تجاربه أن هناك ارتباطا عاليا بين نواحي

(١) Galton, F. Hereditary Genius. 1869.

(٢) Psychological Monngraph Supplement III 1901.

التحصيل الدراسي ، بينما ليس هناك ارتباط يذكر بين النواحي النفسية التي اشتملتها الاختبارات . وقد كان سبب ذلك راجعا الى : —

(١) العينة التي طبقت عليها الاختبارات والمقاييس كانت مختارة لحد كبير .

(٢) كما أن الوظائف النفسية التي شملها البحث كانت حسية بسيطة .

وفي سنة ١٨٩٥ حاول بينيه [1] Binet قياس القدرة العامة (الذكاء) على أنه محصلة عدة ملكات : الذاكرة والتصور والتخيل والانتباه وملكة الفهم والقابلية للايحاء والحكم الجمالي والعاطفة الخلقية والقوة العضلية وقوة الارادة والمهارة . وقد أعد اختباره المعروف للذكاء متضمنا هذه الملكات .

وفي سنة ١٩٠٢ قام ثورندك Thorondike [2] ببحث عملي حسب فيه معاملات الارتباط بين عمليات ادراكية وارتباطية ووصل منه الى النتيجة الآتية : — ان النتائج تؤيد أن الوظائف العقلية التي تبدو شديدة التشابه قد تكون في الواقع عمليات تخصصية مستقل كل منها عن الأخرى .

ولكن بذور التحليل العاملي قد نبعت من بحوث وتجـارب سبيرمان [3] Spearman فقد أجرى سنة ١٩٠٤ عددا من البحوث قام فيهـا بحساب المعاملات الارتباط بين عدد من الاختبارات ، وقد انتهى من هذه البحوث الى النتيجتين الآتيتين : —

(أ) أن هناك ما يمكن أن نطلق عليه « الذكاء » كعامل يدخل في جميع العمليات العقليـة .

(ب) ومع هذا العنصر المشترك فان جميع نواحي النشاط العقلي يختلف كل منها عن الأخـرى .

وكانت هاتان النتيجتـان هما الأساس الذي بنى عليـه سبيرمان نظرية العاملين Two Factor Theory التي تنص على أن كل عملية عقلية تتكون من عاملين أساسيين :

---

(١) Binet, A., Henri, V, « La Psychologie Individuelle » L'Année. Psychologue II.

(٢) Thorondike, E. L., « Heredity and Correlation in School Abilities » Psychological, Review IX, 1902.

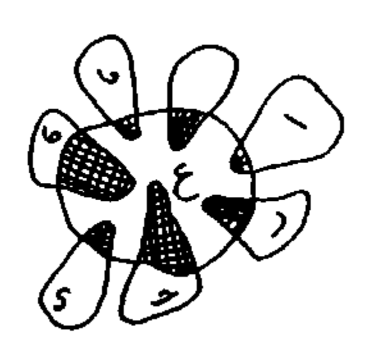
(٣) Spearman, C., « General Intelligence Objectively Determined and measured, American Journal of Psychology, 1904.

١ — عامل عام تشترك فيه جميع العمليات الأخرى ويرمز له سبيرمان بالرمز « g ».

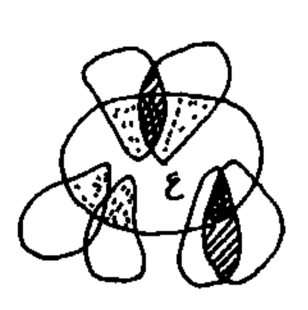
٢ — عامل خاص بها تختلف فيه كل عملية عن الأخرى ويرمز له سبيرمان بالرمز « S ».

وفي بحث بيرت Burt سنة ١٩٠٩ [1] الذي كان يهدف منه الى اختبار صحة النتائج التي وصل اليها سبيرمان ، كما قصد الى اختبار صحة فرض جديد هو وجود عوامل طائفية تتدخل في بعض العمليات العقلية دون غيرها . وجد بيرت بالفعل أن التحليل الاحصائي لمعاملات الارتباط التي حصل عليها من تجاربه تدل على أن الاختبارات التي استخدمها يمكن تقسيمها على هيئة مجموعات ، تحددها عوامل مشتركة بين اختبارات المجموعة الواحدة علاوة على العامل المشترك بين الاختبارات جميعا .

وقد مهدت هذه البحوث وكثير غيرها لظهور تعديل لنظرية العاملين واعلان نظرية العوامل الثلاثة ، والعلاقة بين النظريتين يمكن تمثيلها بالرسم الآتي :



شكل (٤٩) نظرية ذات العاملين



شكل (٥٠) نظرية ذات العوامل الثلاثة

وأهم نواحي النقد التي وجهت ضد نظرية العاملين ونظرية العوامل الثلاثة قد جاءت من جهتين :

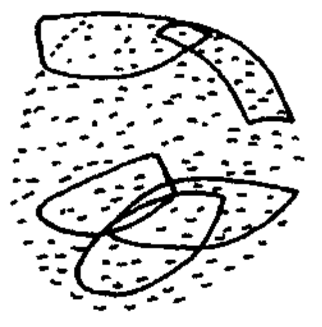
---

(١) Burt, C., Experimentel Tests of General Intelligence, British Journal of Psychology, 3, 1909.

(أ) نظرية العينات Sampling Theory التي وضعها تومسون Thomson [1]

(ب) نظرية العوامل الطائفية المتعددة [2] Multiple Group Factors Theory

يرى تومسون أن السلوك يتوقف على عدد كبير من العناصر المستقل بعضها عن بعض وهذه العناصر كان يفسرها أحيانا على أنها النيورونات العصبية أو الوصلات بين هذه النيورونات، وكل وجه من أوجه النشاط يتوقف ويتضمن عينة محددة أو نموذجا Pattern خاصا من هذه الوحدات ومعاملات الارتباط الموجبة بين أي وجهين من أوجه النشاط العقلي مرجعه التداخل الذي يحدث بين العينات المختلفة التي تضم عناصر مختلفة. وعلى هذا الأساس يمكن أن نفسر وجود أي نوع من أنواع العوامل أكثرها اتساعا وهو العامل العام الى أقلها اتساعا وهو العامل الخاص الذي يختص بعملية واحدة. ويمكن تمثيل هذه النظرية بالشكل الآتي :



شكل (٥١) نظرية العينات لتومسون

أما ثرستون فيرجح تنظيم العمليات العقلية على هيئة مجموعات أو قدرات حسب التفسير النفسي ، ويستبعد ضرورة وجود العامل العام المشترك في جميع هذه العمليات. ويقنع بأن يقرر بأنه لم يجد ضرورة تحتم عليه في أي بحث من بحوثه الالتجاء الى مفهوم العامل العام كأساس لتفسير النتائج.

الا أنه يعود ويفضل التفسير على أساس العوامل الطائفية المترابطة Correlated Group Factors ،أو ما يطلق عليه أحيانا العوامل الطائفية من الدرجة الثانية Second Order Group Factors وبذا يقترب قليلا في تفسيره هذا من احتمال ايجاد العامل العام.

---

(١) Thomson, C., The Factorial Analysis of Human Ability, 1950.

(٢) Thurstone, L.L., The Vectors of Mind 1935

ويمكن أن نلخص النظريات المختلفة للتنظيم العقلي فيما يأتي :

١ - نظرية البؤرة الواحدة . Unifocal

ويمثلها سبيرمان .

٢ - نظرية البؤرات المتعددة Multifocal

ويمثلها ثرستون

٣ - نظرية اللابؤريـــة Non-Focal

ويمثلها ثورنديك .

ومن النظريتين الأولى والثانية نشأت نظرية العوامل الثلاثة ويمثلها بيرت في انجلترا وهلزنجر Holzinger في أميركا .

واليك فيما يلي الأسس الاحصائية التي أدت الى الوصول لأهم طرق التحليل العاملي الشائعة الاستخدام . ومن الطبيعي أن نبدأ في هـــذه الأسس بالوسائل الاحصائية التي استخدمها سبيرمان في بحوثه والتي تعتبر الفتح الهام في هذا الميدان .

معادلة الفروق الرباعية Tetrad Differences Equation

وبالرغم من أن طرق التحليل الاحصائي التي قام بها سبيرمان لا تعد من طرق التحليل العاملي الا أنها كانت الأساس النظري والاحصائي الذي بنيت عليه الطرق الأخرى . وقد ساعد على ظهور هذه الطرق التقدم الاحصائي وزيادة استخدام الوسائل الاحصائية في البحوث النفسية في نصف القرن الأخير الذي تلى ظهور نظرية العاملين .

والفكرة الأساسية في نظرية سبيرمان تقوم على مفهوم الترتيب المتدرج المتشعب Hirarchy ويسميه البعض [1] الترتيب الهرمي . فاذا أجرينا ست اختبارات على عينة من الأفراد ووضعنا معاملات الارتباط في مصفوفة مرتبة حسب المجموع الكلي للأعمدة كما في الجدول الآتي :

---

(١) انظر باب التحليل العاملي في كتاب الاحصاء في التربية وعلم النفس الدكتور عبد العزيز القوصي - الدكتور حسن محمد حسين - الدكتور محمد خليفة بركات ويفضل المؤلف استخدام اللفظ كما هو فيطلق على الجدول المرتب بهذا الشكل « الجدول الهيراركي » .

	أ	ب	جـ	د	هـ	و
أ		٠,٤٨	٠,٤٠	٠,٣٢	٠.٢٤	٠,١٦
ب	٠,٤٨	—	٠,٣٠	٠,٢٤	٠,١٨	٠,١٢
جـ	٠,٤٠	٠,٣٠	—	٠,٢٠	٠,١٥	٠,١٠
د	٠,٣٢	٠,٢٤	٠,٢٠	—	٠,١٢	٠,٠٨
هـ	٠,٢٤	٠,١٨	٠,١٥	٠,١٢	—	٠,٠٦
و	٠,١٦	٠,١٢	٠,١٠	٠,٠٨	٠,٠٦	—
المجموع	١,٦٠	١,٣٢	١,١٥	٠,٩٦	٠,٧٥	٠,٥٢

جدول (١٠١) مصفوفة ارتباطية مرتبة على هيئة « هيراكي »

ويلاحظ أن المعاملات في هذا الجدول تتناقص تدريجيا في كل صف أو عامود .

وقد وجد سبيرمان أن هذا الجدول حالة العمليات العقلية المعرفية **Cognitive** تكون جميعها موجبة الاشارة ، مما جعله يصل الى فرض وجود العامل العام في العمليات التي يتضمنها الجدول الارتباطي . وقد لاحظ سبيرمان ملاحظة هامة ، وهي أن النسبة بين المعاملات المختلفة في أي عمودين تكون واحدة ، فاذا أخذنا مثلا المعاملات في العامودين ب ، هـ من الجدول نجد أنها :

ب	هـ	النسبة
٠,٤٨	٠,٢٤	
—	٠,١٨	
٠,٣٠	٠,١٥	
٠,٢٤	٠,١٢	٢ : ١
٠,١٨	—	
٠,١٢	٠,٠٦	

وكذلك في أي عامودين آخرين . وقد استنتج سبيرمان أنه اذا وجدت خاصية النسبة

هذه في أعمدة جدول ارتباطي دل ذلك على أن الاختبارات التي يمثل هذا الجدول العلاقة بينها يشترك بينها عامل عام [1] .

والجدول السابق هو جدول فرضي ولذلك نجد أن هذه القاعدة تنطبق تماما على المعاملات في الجدول ، ولكن في التجارب العملية لا يمكن أن يصل الباحث الى هذا النموذج النظري ، فقد تزيد المعاملات أو تنقص عن هذه المعاملات المتوقعة ويحتاج الباحث بعد هذا الى تحديد درجة انطباق النتيجة التجريبية على النموذج النظري للترتيب الهيراركي ، وقد اقترح سبيرمان [2] لذلك أن نحسب معاملات الارتباط بين كل عمودين من أعمدة المصفوفة الارتباطية ، فاذا كانت كلها مساوية [1] كان الترتيب الهيراركي كاملا ، وكلما بعدت معاملات الارتباط عن ذلك كلما قلت درجة انطباق المصفوفة على الترتيب الهيراركي .

تحولت فكرة النسبة بين معاملات الأعمدة بعد ذلك الى فكرة المعادلة الرباعية ولتوضيحها نفرض الجدول الارتباطي الرمزي الآتي :

	أ	ب	حـ	د
أ	(أأ)	أ ب	أ حـ	أ د
ب	ب أ	(ب ب)	ب جـ	ب د
حـ	حـ أ	جـ ب	(حـ . حـ)	حـ د
د	د أ	د ب	د . ب	(د . د)

جدول (١٠٢) مصفوفة ارتباطية رمزية

فهذه المصفوفة تتضمن معاملات الارتباط بين أربعة اختبارات أ ، ب ، حـ ، د ــ حيث أ ب يمثل معامل الارتباط من الاختبارين أ ، ب ، ونفس هذا التفسير يتبع في باقي الرموز الأخرى ، وقد وضعت الرموز القطرية بين قوسين لأن قيمها لا تعرف من

---

(١) لا يوافق تومسون على هذا الاستنتاج بالرغم من أنه يوافق على عكس هذا الاستنتاج ، وهو أن الجدول الارتباطي لعدد من اختبارات تشترك في عامل يكون على هيئة ترتيب هيراركي ، ولكن خاصية الترتيب الهيراركي ليست دليلا قاطعاً على وجود عامل عام مشترك بين اختبارات الجدول .

(٢) Spearman, General Ability Its Existance And Nature, British Journal of Psychology.

البحث التجريبي بل تقدر تبعا للمعاملات في الجدول كما سيتضح فيما بعد وتسمى باشتراكية الاختبار Communality .

وبما أن هذا الجدول يمثل ترتيبا هيراركيا فحسب خاصية النسبية السابق شرحها يكون أحـ / أ د = ب حـ / ب د وتتبع نفس العلاقة بين أي أربعة معاملات متقابلة من معاملات الجدول .

ومن هذه المعادلة ينتج أن :

أحـ × ب د = أد × ب حـ

أو أن أحـ × ب د ــ أد × ب حـ = صفر

ويطلق على هذه المعادلة معادلة الفروق الرباعية Tetrad Equation

هذا ويمكن الوصول من معاملات الارتباط الموجودة في الجدول الى درجة تشبع Saturation أي اختبار بالعامل العام .

لنفرض وجود اختبار يمثل العامل العام ولنرمز له بالرمز « م » فيكون معامل الارتباط بينه وبين نفسه معادلا ١ ، فاذا أضفناه للاختبارات الأربعة السابقة تصبح المصفوفة الارتباطية كما يلي :

	م	أ	ب	حـ	د
م	١	م أ	م ب	م حـ	م د
أ	أ م	(أأ)	أ ب	أ حـ	أ د
ب	ب م	ب أ	(ب ب)	ب حـ	ب د
حـ	حـ م	حـ أ	حـ ب	(حـ حـ)	حـ د
د	د م	د أ	د ب	د حـ	(د د)

جدول (١٠٣) مصفوفة ارتباطية مشتملة على اختبار يمثل العامل العام

ومن الطبيعي ان يقع الاختبار الممثل للعامل العام في قمة الجدول نظرا لأن من خواص الجدول الهيراركي أن ترتب فيه الاختبارات تبعا لدرجة تشبعها بالعامل العام .

ومن الخاصية النسبية للجدول الهيراركي نستنتج أن :

$$\frac{\text{م أ}}{\text{١}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{ب م}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{د أ}}{\text{د م}}$$

∴ ب أ = م أ × م ب ، حـ أ = م أ × حـ م . . وهكذا .

أي أن معامل الارتباط بين أي اختبارين ينتج من حاصل ضرب معاملي الارتباط بينهما والعامل العام .

فاذا كان معامل الارتباط بين(أ)والعامل العام (ويطلق على هذا المعامل درجة تشبع الاختبار أ بالعامل العام) = ٠,٦ ، ومعامل الارتباط بين ب والعامل العام = ٠,٧ كان معامل الارتباط الناتج عن هذا العامل المشترك = ٠,٤٢ .

ومن هذه القاعدة يمكن أن نحلل أ أ الى م أ × م أ .

أي أنه لحساب درجة تشبع أ بالعامل العام نستخرج قيمة $\sqrt{\text{١١}}$

ولكن أ أ لا تكون معروفة لدى الباحث بل يقدرها تبعا لنمط معاملات الجدول ولذا كان علينا أن نستعيض عنها بمقادير أخرى بالطريقة الآتية :

$$\frac{\text{أ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د أ}}{\text{د ب}}$$

$$\therefore \text{أ أ} = \frac{\text{أ ب} \times \text{د أ}}{\text{د ب}}$$

أي أن درجة تشبع (أ) بالعامل العام

$$= \sqrt{\frac{\text{حـ أ} \times \text{أ ب}}{\text{حـ ب}}} = \sqrt{\frac{\text{د أ} \times \text{أ ب}}{\text{د ب}}} = \sqrt{\frac{\text{حـ أ} \times \text{أ د}}{\text{حـ د}}}$$

واذا طبقنا هذا على جدول (١٤٦) نجد أن درجة تشبع (أ) بالعامل العام

$$= \sqrt{\frac{٠,٤٠ \times ٠,٨٤}{٠.٣٠}} = \sqrt{\frac{٠,٣٢ \times ٠,٤٨}{٠,٢٤}}$$

$$= \sqrt{\frac{٠,٣٢ \times ٠,٤٠}{٠,٢٠}} = ٠,٨٠$$

وكانت نظرية سبيرمان تتلخص في أنه في الحالات التي تبلغ جميع قيم الفروق الرباعية صفرا فان معاملات الارتباط في الجدول تفسر على أنها ناتجة عن عامل مشترك واحد يجري في جميع الاختبارات وكانت النتائج التجريبية التي يحصل عليها سبيرمان تشذ دائما عن ذلك ، الا أن البواقي في هذه المعادلات لم تكن ذات دلالة احصائية اذا قورنت بالخطأ المعياري لمعاملات الجدول ، وقد كان السبب الأساسي في ذلك أن هذه الاختبارات التي شملتها الأبحاث في ذلك الوقت كان أغلبها فرديا ، ولذا كانت مقصورة على عدد صغير من الأفراد .

اكتشاف العوامل الطائفية Group Factors :

بتقدم الأساليب التجريبية والوسائل الاحصائية في ميدان القياس العقلي أمكن استخدام اختبارات جمعية تقيس عددا كبيرا من الأفراد في جلسة واحدة ، وبذلك اتضح أن بواقي (Residuals) معاملات الارتباط بعد استخراج أثر العامل العام منها والتي كانت تعتبر سابقا عديمة الدلالة الاحصائية هي في الواقع ذات دلالة اذا قورنت بعدد أفراد العينات الكبيرة ، ومعنى هذا أن هذه البواقي يمكن مواصلة تحليلها للكشف عن عوامل مشتركة أخرى بين بعض اختبارات الجدول دون غيرها ، أي أن الموقف قد تغير تغيرا يوضحه الجدول الآتي :

	نظرية العاملين		نظرية العوامل الطائفية				
الاختبار	العامل المشترك	الباقي	عامل عام	عامل طائفي (١)	عامل طائفي (٢)	عامل طائفي (٣)	الباقي
أ	×	صفر	×	×	—	—	صفر
ب	×	صفر	×	—	×	—	صفر
حـ	×	صفر	×	×	—	—	صفر
د	×	صفر	×	—	—	×	صفر
هـ	×	صفر	×	—	×	—	صفر
و	×	صفر	×	—	—	×	صفر

جدول (١٠٤) نمط التشبعات في نظريتي العاملين والعوامل الطائفية

هذا وقد ذكرنا أن بعض الباحثين يعارضون ضرورة التفسير على أساس وجود العامل العام المشترك . ولذا فان الطرق التي يستخدمونها تحذف أثر العامل العام كضرورة لازمة من ضروريات تكوين الصورة الكلية في التحليل .

وعلى أساس فرض العوامل الطائفية يمكن أن نحلل معامل الارتباط بين أي اختبارين أ ـ ب الى عدة عوامل ، فلو رمزنا للعامل العام بالرمز م وللعوامل الطائفية بالرموز ط$_{١}$ ، ط$_{٢}$ ، ط$_{٣}$ مثلا .

فان أ ب = أ م × ب م + أ ط$_{١}$ × ب ط$_{١}$ + أ ط$_{٢}$ × ب ط$_{٢}$ +
أ ط$_{٣}$ × ب ط$_{٣}$ + خ .

على اعتبار أن « خ » هو الجزء الناتج عن الأخطاء التجريبية في معامل الارتباط أ ب .

الطرق العملية للتحليل العاملي :

يمكننا أن نلخص الموقف الحالي فيما يتعلق بالصورة النهائية لنتائج التحليل العاملي في اتجاهين :

(أ) اتجاه يعترف بالعامل العام كأساس لازم في التحليل مع الاعتراف أيضا بالعوامل الطائفيـــة .

(ب) اتجاه لا يعترف بضرورة تضمن الصورة النهائية للنتائج للعامل العام ويقتصر على العوامل الطائفية ، سواء كانت هذه العوامل مترابطة أو مستقلة (متعامدة) . وأصحاب هذا الاتجاه لا يدخلون ضمن الخطوات العملية للطرق التي يستخدمونها ما يضمن الاحتفاظ بالعامل العام .

وسنعرض فيما يلي طرقا لهذين الاتجاهين وسيشتمل هذا العرض على :

(أ) طريقة الجمع البسيط Simple Summation (بيرت Burt [١]) وعلاقتهـــا بالطريقة المركزية .

(ب) طريقة العوامل الطائفية Group Factor Method (بيرت Burt) وعلاقتها بطريقة العوامل الجمعية Bi-Factor Method (هلزنجر Holzinger [١]) .

(١) Holzinger K. J. Factor Analysis : A Synthesis of Factorial Methods, 1940.

طريقة الجمع البسيط :

لفهم الأساس النظري الذي تقوم عليه الطريقة نفترض أربعة اختبارات (أ ، ب ، جـ ، د) ومعاملات الارتباط بينها كما في الجدول الآتي :

	أ	ب	جـ	د
أ	(أأ)	أ ب	أ جـ	أ د
ب	ب أ	(ب ب)	ب جـ	ب د
جـ	جـ أ	جـ ب	(جـ جـ)	جـ د
د	د أ	د ب	د جـ	(د د)

مجموع معاملات الاختبار أ (العامود الأول = (أأ) + (ب أ) + (جـ أ) + (د أ) .

وبتحليل كل معامل من هذه المعاملات الى قسمين يكون حاصل الجمع العامود الأول . (على اعتبار أن م تمثل العامل العام) .

= (م أ × م أ) + (م ب × م أ) + (م جـ × م أ) + (م د × م أ)

= م أ (م أ + م ب + م جـ + م د) .

وبالمثل فان مجموع معاملات العامود الثاني :

= م ب (م أ + م ب + م جـ + م د)

ومجموع معاملات العامود الثالث :

= م جـ (م أ + م ب + م جـ + م د)

ومجموع معاملات العامود الرابع :

= م د (م أ + م ب + م جـ + م د)

∴ يكون المجموع الكلي لهذه المعاملات = (م أ + م ب ـ م جـ ا م د) ٢

فاذا استخرجنا الجذر التربيعي للمجموع الكلي ، ثم قسمنا حاصل جمع كل عامود على هذا الجذر ينتج م أ ، م ب ، م جـ ، م د ، أي معامل ارتباط الاختبارات بالعامل

العام أو بالتعبير الشائع درجة تشبع كل اختبار بالعامل العام . وهذه هي نفس الخطوات العملية في طريقة الجمع البسيط وتتلخص الخطوات العملية لحساب درجات تشبع الاختبارات بالعامل العام فيما يأتي :

١ ـ يحسن بالمبتدىء أن يرتب الاختبارات في المصفوفة ترتيبا تنازليا حسب المجموع الكلي لمعاملات ارتباط الاختبار مع باقي الاختبارات .

وفيما يلي نتيجة أحد البحوث وهي تتضمن مصفوفة ارتباطية لاختبارات ستة :

١ ـ المرادف والعكس Synonyms and opposites
٢ ـ التكميـــل Completion
٣ ـ سلاسل الأعداد Number Series
٤ ـ المحصول اللغوي Vocabulary
٥ ـ ذاكرة الأعـــداد Memory for Numbers
٦ ـ سلاسل الأشكال Form Series

رقم الاختبار	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	—	,٥٨	٠,٣٠	٠.٤٩	٠,٤٤	٠,٣٨
٢	٠,٥٨	—	٠,١٠	٠,٤٦	,٢١	,١٣
٣	٠,٣٠	٠,١٠	—	,٠٩	٠,٢٨	,٥٠
٤	,٤٩	,٤٦	,٠٩	—	,٢٥	,١٢
٥	,٤٤	,٢١	,٢٨	,٢٥	—	,٣٦
٦	,٣٨	,١٣	,٥٠	,١٢	,٣٦	—
المجموع	٢,١٩	١,٤٨	١,٢٧	١,٤١	١,٥٤	١,٤٩

جدول (١٠٥) مصفوفة ارتباطية لستة اختبارات

٢ ـ في الأحوال التجريبية تكون الخلايا القطرية خالية وتحتاج لملئها بمعاملات مناسبة . وليست هناك طريقة محددة لملئها . فطريقة برت هي وضع قيم تقديرية تتناسب مع نمط المعاملات في الجدول . ثم تعدل هذه القيم بعد نهاية التحليل ، ويعاد التحليل ثانيا وثالثا حتى ينتهي الباحث في النهاية الى وضع معاملات تناسب العوامل الناتجة من التحليل .

ولكن ثرستون يقترح وضع أعلى معامل في الخلايا القطرية في كل خطوة من خطوات التحليل . أي يحذف المعامل الناتج في كل خطوة من خطوات التحليل ويوضع بدله أعلى معامل للاختبار .

وفي الجدول الآتي قد وضعت معاملات قطرية مقدرة تحت الصف الخاص بحاصل جمع الأعمدة ثم جمعت هذه المعاملات مع مجموع الأعمدة وحسب المجموع الكلي (١٢,٤٨) .

رقم الاختبار	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
١		,٥٨	,٣٠	,٤٩	,٤٤	,٣٨	٢,١٩
٢	,٥٨	—	,١٠	,٤٦	.٢١	.١٣	١,٤٨
٣	,٣٠	,١٠	—	,٠٩	.٢٨	,٥٠	١,٢٧
٤	,٤٩	,٤٦	,٠٩	—	.٢٥	.١٢	١,٤١
٥	,٤٤	,٢١	,٢٨	,٢٥	—	.٣٦	١,٥٤
٦	,٣٨	,١٣	,٥٠	,١٢	,٣٦	—	١,٤٩
المجموع	٢,١٩	١,٤٨	١,٢٧	١,٤١	١,٥٤	١,٤٩	٩,٣٨
المعامل القطري	٠,٧٠	,٦٠	,٤٠	,٤٠	,٤٠	,٦٠	٣,١٠
المجموع الكلي	٢,٨٩	٢,٠٨	١,٦٧	١,٨١	١,٩٤	٢,٠٩	١٢,٤٨
س م	,٨١٨	,٥٨٩	,٤٧٣	,٥١٢	,٥٤٩	,٥٩٢	$(٣,٥٣٣)^{٢}$

جدول (١٠٦) حساب درجات التشبع بالعامل العام

٣ — استخرج الجذر التربيعي للمجموع الكلي (٣,٥٣٣) .

٤ — اقسم مجموع كل عامود على الجذر التربيعي لتنتج درجات تشبع Saturations الاختبارات بالعامل العام:

(٢,٨٩ ÷ ٣,٥٣٣ = ٠,١٨١٨ ، ٢,٠٨ ÷ ٣.٥٣٣ = ٠,٥٨٩ وهكذا) .

وللتأكد من صحة هذه العمليات الحسابية ينبغي أن يكون مجموع درجات التشبع معادلا للجذر التربيعي للمجموع الكلي وهو هنا ٣.٥٣٣ .

حساب درجات التشبع بالعامل القطبي الأول :

٥ – بعد حساب درجات التشبع بالعامل العام تنحصر الخطوة التالية في تخليص الجدول من المعاملات الناتجة عن هذا العامل العام ، ولذلك فان من اللازم حساب معاملات الارتباط الناتجة عن هذا العامل وحده .

وقد سبق أن ذكرنا أن معامل الارتباط بين أي اختبارين بسبب ما بينهما من عامل عام = درجة تشبع الاختبار الأول بالعامل العام × درجة تشبع الاختبار الثاني به ، ولذا فان هذه الخطوة تشتمل على تكوين جدول لمعاملات الارتباط المتوقعة على أساس العامل العام . والمعاملات المكتوبة خارج الجدول هي درجات التشبع بالعامل العام التي نتجت من الخطوة السابقة . ويلاحظ أن الاختبارات في هذا الجدول قد أعيد ترتيبها على أساس درجات تشبعها بالعامل العام .

		٠,٨١٨	٠,٥٩٢	٠,٥٨٩	٠,٥٤٩	٠,٥١٢	٠,٤٧٣
	رقم الاختبار	١	٦	٢	٥	٤	٣
٠,٨١٨	١	(٠,٦٦٩)	٠,٤٨٤	٠,٤٨٢	٠,٤٤٩	٠,٤١٩	٠,٣٨٧
٠,٥٩٢	٦	٠,٤٨٤	(٠,٣٤٩)	٠,٤٣٩	٠,٣٢٥	٠,٣٠٣	٠,٢٨٠
٠,٥٨٩	٢	٠,٤٨٢	٠,٤٣٩	(٠,٣٤٧)	٠,٣٢٣	٠,٣٠١	٠,٢٧٨
٠,٥٤٩	٥	٠,٤٤٩	٠,٣٢٥	٠,٣٢٣	(٠,٣٠٣)	٠,٢٨١	٠,٢٥٩
٠,٥١٢	٤	٠,٤١٩	٠,٣٠٣	٠,٣٠١	٠,٢٨١	(٠,٢٦٣)	٠,٢٤٣
٠,٤٧٣	٣	٠,٣٨٧	٠,٢٨٠	٠,٢٧٨	٠,٢٥٩	٠,٢٤٣	(٠,٢٢٣)
	المجموع	٢,٨٩٠	٢,٠٩٠	٢,٠٨٠	١,٩٤٠	١,٨١٠	١,٦٧٠

جدول (١٠٧) المعاملات المتوقعة على أساس العامل العام .

ونلاحظ أن مجموع الأعمدة هو نفسه للمعاملات الأصلية مع اضافة المعامل المقدر للخلايا القطرية مع فروق طفيفة جدا ناتجة عن التقريب في العمليات الحسابية .

٦ – اطرح خلايا الجدول النظري للمعاملات المتوقعة الذي حسبته أخيرا من خلايا الجدول الأصلي (التجريبي) لتحصل على جدول البواقي Residuals ويلاحظ في هذا الجدول أن المجموع الجبري للبواقي في الصف أو العامود صفر ما دام مجموع المعاملات

في الأعمدة لم يتغير . فبعض البواقي تكون موجبة الاشارة وبعضها سالبة الاشارة .

واليك فيما يلي جدول البواقي بعد العامل العام في المثال ، وقد دونت فيه بواقي الخلايا القطرية وهي الناتجة من طرح المعامل المتوقع على أساس العامل العام من المعامل الذي سبق تقديره . ومن المتبع دائما وضع المعاملات القطرية بين قوسين لبيان أنهـــا معاملات تقديرية . وهذه البواقي هي التي يحسب منها درجات تشبع الاختبارات بالعوامل القطبيـــة .

رقـــم الاختبار	١	٦	٢	٥	٤	٣	المجموع
١	(٠,٠٣١)	— ٠,١٠٤	+ ٠,٠٩٨	— ٠,٠٠٩	+ ٠,٠٧١	— ٠,٠٨٧	—
٦	— ٠,١٠٤	(٠,٢٥١)	— ٠,٢١٩	+ ٠,٠٣٥	— ٠,١٨٣	+ ٠,٢٢٠	—
٢	+ ,٠٩٨	— ٠,٢١٩	(٠,٢٥٣)	— ٠,١١٣	+ ٠,١٥٩	— ٠,١٧٨	—
٥	— ٠,٠٠٩	+ ٠,٠٣٥	— ٠,١١٣	(٠,٠٩٧)	— ٠,٠٣١	+ ٠.٠٢١	—
٤	+ ٠,٠٧١	— ٠,١٨٣	+ ٠,١٥٩	— ٠,٠٣١	(٠,١٣٧)	— ٠,١٥٣	—
٣	٠,٠٨٧	+ ٠,٢٢٠	— ٠,١٧٨	+ ٠,٠٢١	— ٠,١٥٣	(٠.١٧٧)	—
المجموع	—	—	—	—	—	—	—

جدول (١٠٨) البواقي **Residuals** بعد العامل العام

٧ — رتب البواقي الموجودة في الجدول بحيث تتجمع البواقي الموجبة الاشارة في الربعين الأيمن العلوي والأيسر السفلي ، والسالبة الاشارة في الربعين الباقيين . فيكون نمط توزيع الاشارات في الجدول كالآتي :

—	+
+	—

ولا يشترط أن يكون عدد الاختبارات متساوية في القسمين العلوي والســـفلي أو الأيمن والأيسر كما هو الحال في المثال الحالي ولكن المهم أن يكون المجموع الجبري للبواقي هو الذي يكون واحدا في النصفين ، ولا ينتظر دائما في الحالات التجريبية أن تحصل

على نموذج منتظم انتظاما تاما كما في الشكل . ولكن المهم أن تتبع غالبية الاشارات في كل ربع بالجدول هذا النظام ، وأن يكون المجموع الجبري لأجزاء الأعمدة في كل ربع متمشيا مع هذا النموذج العام .

وفيما يلي جدول يضم البواقي السابقة مرتبة حسب النموذج المطلوب ، والذي يساعد على ترتيب البواقي ملاحظة اشاراتها فنجد في الجدول السابق أن البواقي ما بين الاختبارات ١ ، ٢ ، ٤ موجبة دائما وكذلك البواقي ما بين الاختبارات ٦ ، ٥ ، ٣ . ولكن بواقي المعاملات بين أفراد كل من المجموعتين والأخرى سالبة ، مما يرجح التقسيم على هذا النحـــو :

رقم الاختبار	١	٢	٤	٦	٥	٣
١	(٠,٠٣١)	+٠,٠٩٨	+٠,٠٧١	−٠,١٠٤	−٠,٠٠٩	−٠,٠٨٧
٢	+٠,٠٩٨	(٠,٢٥٣)	+٠,١٥٩	−٠,٢١٩	٠,١١٣	−٠,١٧٨
٣	+٠,٠٧١	+٠,١٥٩	+٠,١٢٧	−٠,١٨٣	−٠,٠٣١	٠,١٥٣
	(+)	(+)	(+)	(−)	(−)	(−)
٦	−٠,١٠٤	−٠,٢١٩	−٠,١٨٣	(٠,٢٥١)	+٠,٠٣٥	+٠,٢٢٠
	(+)	(+)	(+)	(−)	(−)	(−)
٥	−٠,٠٠٩	−٠,١١٣	−٠,٠٣١	+٠,٠٣٥	(٠,٠٩٧)	+٠,٠٢١
	(+)	(+)	(+)	(−)	(−)	(−)
٣	−٠,٠٨٧	−٠,١٧٨	٠,٢٥٣	+٠,٢٢٠	+٠,٠٢١	(٠,١٧٧)
	+٠,٣٠٠	+٠,٥١٠	+٠,٣٦٧	−٠,٥٠٦	−٠,١٨٣	٠,٤١٨
المجموع	+٠,٤٠٠	+٠,٥١٠	+٠,٣٦٧	−٠,٥٠٦	−٠,١٥٣	−٠,٤١٨
	+٠,٤٠٠	+١,٠٢٠	+٠,٧٣٤	−١,٠١٢	−٠,٣٠٦	−٠,٦٣٨
		٢,١٥٤		+	٢,١٥٤	= ٤,٣٠٨
س ق١	٠,١٩٣	٠,٤٩١	٠,٣٥٤	−٠,٤٨٧	−٠,١٤٧	−٠,٤٠٣
			= ٢,٠٧٦			

جدول (١٠٩) البواقي بعد العامل العام بعد ترتيبها وعكسها .

٨ – الخطوة التالية هـي التي يطلق عليها خطوة الانعكاس Reflextion فنعكس اشارات الاختبارات التي في النصف السفلي من الجدول أي نضرب البواقي التي بها في – ١ . ففي المثال الحالي نعكس اشارات الاختبارات ٦ ، ٥ ، ٣ . ولكي لا تضيع الاشارات الأصلية تكتب الاشارات الجديدة فوق الاشارات الأصلية بين قوسين كما هو موضح في الجدول (١١٢) .

٩ – اجمع البواقي في كل عامود بعد حدوث الانعكاسات اللازمة ، ثم أوجد المجموع الكلي مع تجاهل اشارات حواصل جمع الأعمدة . والمجموع الكلي في هذا المثال لهذه البواقي هو ٤,٣٠٨ ، ويلاحظ أن مجموع أعمدة القسمين واحدا في الجدول (٢,١٥٤) .

١٠ – أوجد الجذر التربيعي لهذا المجموع الكلي (وهو هنا ٢,٠٧٦) ، ثم اقسم حاصل جمع كل عامود على هذا الجذر التربيعي فينتج درجة تشبع كل اختبار بالعامل القطبي الأول ، ويجب الا ننسى ارجاع الاشارة السالبة للاختبارات التي تم انعكاسها أثناء التحليل .

ويصف Burt [1] العوامل من هذا النوع بأنها عوامل قطبية أو ذات قطبين لأن درجات تشبع الاختبارات به لها نوعان من الاشارة (سالبة وموجبة) وهي في هذا المثال تمتد من + ٠,٤٩١ الى – ٠,٤٨٧ .

١١ – والخطوات التالية تشبه الخطوات السابقة وتهدف الى استخراج درجات تشبع الاختبارات بالعامل القطبي الثاني ، وذلك بتكوين جدول نظري لمعاملات الارتباط المتوقعة على أساس العامل القطبي الأول بنفس الطريقة التي تكون بها الجدول النظري على أساس العامل العام ثم تطرح خلايا هذا الجدول من خلايا الجدول السابق للحصول على البواقي بعد العامل القطبي .

(١) Burt, C., The Factors of the Mind, 1940.

	٠.١٩٣	٠.٤٩١	٠.٣٥٤	٠.٤٨٧	— ٠.٤٠٣	

	رقم الاختبار	١	٢	٤	٦	٥	٣
٠.١٩٣	١	(٠,٣٧)	+ ٠,٠٩٥	+ ٠,٠٦٨	— ٠,٠٩٤	— ٠.٠٢٨	٠.٠٧٨
٠,٤٩١	٢	+ ٠.٠٩٥	(٠.٢٤١)	+ ٠,١٧٤	— ٠,٢٣٩	— ٠.٠٧٢	— ٠.١٩٨
٠,٣٥٤	٣	+ ٠.٠٦٨	— ٠,١٧٤	(٠,١٢٥)	— ٠.١٧٢	— ٠.٠٥٢	— ٠.١٤٣
— ٠,٤٨٧	٤	— ٠.٠٩٤	— ٠,٢٣٩	٠.١٧٢	+ (٠,٢٣٧)	+ ٠,٠٧٢	— ٠.١١٦
— ٠.١٤٧	٦	— ٠.٠٢٨	— ٠.٠٧٢	— ٠,٠٥٢	— ٠.٠٧٢	(٠.٠٢٢)	+ ٠.٠٥٩
— ٠,٤٠٣	٥	— ٠.٠٧٨	— ٠.١٩٨	— ٠.١٤٣	+ ٠,١٩٦	+ ٠.٠٥٩	٠.١٦٢)

جدول (١١٠) المعاملات المتوقعة على أساس العامل القطبي الأول

رقم الاختبار	١	٢	٤	٦	٥	٣	المجموع
١	(٠,٠٦)	+ ٠,٠٠٣	+ ٠,٠٠٢	— ٠,٠١٠	+ ٠,٠١٩	— ٠,٠٠٩	—
٢	+ ٠,٠٠٣	(٠,٠١٢)	— ٠,٠١٥	+ ٠,٠٢٠	— ٠,٠٤١	+ ٠,٠٢٠	— ٠,٠١
٤	+ ٠,٠٠٢	— ٠,٠١٥	٠,١٢)	— ٠,١١	— ١,٠٢١	— ٠,٠١٠	—
٦	— ٠,١٠	+ ٠,٠٢٠	— ٠,٠١١	(٠,١٤)	— ٠,٠٣٧	+ ٠,٠٢٤	—
٥	+ ٠,١٩	—٠,٠٤١	+ ٠,٠٢١	— ٠,٠٣٧	(٠,٧٥)	— ٠,٣٨	— ٠,٠١
٣	— ٠,٠٩	+ ٠,٠٢٠	— ٠,٠١٠	+ ٠,٠٢٤	— ٠,٠٣٨	(٠,٠١٥)	+ ٠,٠٢
المجموع	—	— ٠,٠١	—	—	— ٠,٠١	+ ٠,٠٢	

جدول (١١١) البواقي بعد العامل القطبي الأول

١٢ — ومن البواقي في الجدول السابق يتضح أن التقسيم يكون الى قسمين هما : اختبارات ١ ، ٤ ، ٥ ثم اختبارات ٢ ، ٣ ، ٦ .

وتكون البواقي بعد ترتيبها كما يأتي:

	١	٤	٥	٢	٣	٦
١ ٤ ٥	(٠,٠٠٦) + ٠,٠٠٣ + ٠,٠١٩	+ ٠,٠٠٣ (٠,٠١٢) + ٠,٠٢١	+ ٠,٠١٩ + ٠,٠٢١ (٠,٠٧٥)	+ ٠,٠٠٣ — ,٠١٥ — ٠,٠٤١	— ٠,٠٠٩ — ٠,٠١٠ — ٠,٠٣٨	— ٠,٠١٠ — ٠,٠١١ — ٠,٠٣٧
٢ ٣ ٦	(—) + ٠,٠٠٣ (+) — ٠,٠٠٩ (+) — ٠,٠١٠	(+) — ٠,٠١٥ (+) — ٠,٠١٠ (+) — ٠,٠١١	(+) — ٠,٠٤١ (+) — ٠,٠٣٨ (+) — ٠,٠٣٧	(—) (٠,٠١٢) (—) + ٠,٠٢٠ (—) + ٠,٠٢٠	(—) + ٠,٠٢٠ (—) (٠,٠١٥) (—) + ٠,٠٢٤	(—) + ٠,٠٢٠ (—) + ٠,٠٢٤ (—) (٠,٠١٤)
	+ ٠,٠١٦ + ٠,٠١٦	+ ٠,٠٣٦ + ٠,٠٣٣	+ ٠,١١٥ + ٠,١١٦	— ٠,٠٥٣ — ٠,٠٥٢	— ٠,٠٥٧ — ٠,٠٥٩	— ٠,٠٥٨ — ٠,٠٥٨
	+ ٠,٠٣٢	+ ٠,٠٧٢	+ ٠,٢٣١	— ٠,١٠٥	— ٠,١١٦	— ٠,١١٦
		٠,٣٣٥		+	٠,٣٣٧	+ ٠,٦٧٢
س ق ٢	٠,٠٣٩	٠,٠٨٨	٠,٢٨٢	— ٠,١٢٨	— ٠,١٤١	— ٠,١٤١

= (٠,٨٢٠)٢

جدول (١١٢) البواقي بعد العام القطبي الأول بعد ترتيبها وعكسها

١٣ — وتستمر عملية التحليل بنفس النظام حتّى يتضح أن البواقي قد قربت من الصفر أي أصبحت عديمة الدلالة الاحصائية . وعلى هذا الأساس نكتفي هنا باستخراج ثلاثة عوامل : عامل عام وعاملين قطبيين . ويرى برت أنه اذا لم يقترب مجموع مربعات التشبعات لكل اختبار من العوامل القطبية (اشتراكية الاختبار) الذي قدرناه منذ البداية قربا كافيا يعاد التحليل مرة أخرى بتقديرات أخرى وهكذا حتّى يتحقق ذلك .

وفي المثال الحالي نجد أن :

	س م	س ق ١	س ق ٢	مج س ٢	المعامل المقدر	الفـــرق
١	٠,٨١٨	٠,١٩٣	٠,٠٣٩	٠,٧٠٨	٠,٧٠	٠,٠٠٨
٢	٠,٥٨٩	٠,٤٩١	— ٠,١٢٨	٠,٦٠٤	٠,٦٠	٠,٠٠٤
٣	٠,٤٧٣	— ٠,٤٠٣	— ٠,١٤١	٠,٤٠٦	٠,٤٠	٠,٠٠٦
٤	٠,٥١٢	٠,٣٥٤	٠,٠٨٨	٠,٣٩٥	٠,٤٠	— ٠,٠٠٥
٥	٠,٥٤٩	— ٠,١٤٧	٠,٢٨٤	٠,٤٠٤	٠,٤٠	٠,٠٠٤
٦	٠,٥٩٢	— ٠,٤٧٨	— ٠,١٤١	٠,٦٠٨	٠,٦٠	٠,٠٠٨

جدول (١١٣) اختبار المعاملات القطرية المقدرة

وقد روجعت المعاملات المقدرة حتّى أمكن الوصول الى المعاملات الآتية :

٠,٧٢٢ ، ٠,٦٣٥ ، ٠,٣٩٩ ، ٠,٣٧٩ ، ٠,٣٩٢ ، ٠,٦٣٧

وقد أدت هذه المعاملات الى درجات التشبع الآتية :

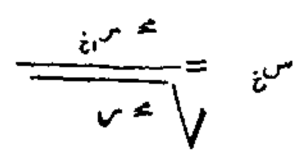
الاختبـــــار	التشبـــع بالعامل العام	التشبـــع بالعامل القطبي (١)	التشبـــع بالعامل القطبي (٢)
المرادف والعكس	٠,٨٢٢	٠,١٩٩	٠,٠٧٣
التكميل	٠,٥٩٧	٠,٥٠٣	٠,١٥٩
سلاسل الأعداد	٠,٤٧٢	٠,٤٠١	— ٠,١٢٩
المحصول اللغوي	٠,٥٠٦	٠,٣٤٢	٠,٠٨٦
ذاكرة الأعداد	٠,٥٤٦	— ٠,١٤٤	٠,٢٧٢
سلاسل الاشكال	٠,٥٩٧	— ٠,٤٩٨	— ٠,١٤٤

جدول (١١٤) درجات التشبع النهائية بالعوامل الثلاثة

١٤ — ويتبع هذا التحليل الاحصائي تفسير للعوامل الناتجة ، ويرى برت أن النتيجة الحالية تصلح أساسا للتفسير بالرغم من وجود الاشارات السالبة في تشبعات اختبارات القدرات بالعوامل القطبية ما دام اختلاف الاشارة لا يتخذ الا على أنه دليل للتقسيم . ولكن ثرستون يصر على أن العوامل الناتجة عوامل فرضية . فلو فرضنا أن هذه العوامل الثلاثة مثلا أبعاد يحدد موضع كل اختبار على أساسها فان الأبعاد المتخذة على هذا الأساس تكون أبعادا لا معنى لها . كأن نحدد نقطة في فراغ الحجرة على أساس محاور متعامدة تصل بين أي ثلاث نقط في هذا الفراغ ، بينما يمكن تحويل هذه الأبعاد عديمة المعنى الى أبعـــاد مؤسسة على الأبعاد المألوفة وهي الطول والعرض والارتفاع بمعناها المفهوم .

ويتضح من جدول (١١٧) أن العامل الأول عامل عام يجري في جميع الاختبارات ويرجح أنه الذكاء العام والعامل الثاني يميز بين الاختبارات اللفظية Verbal (المرادف والعكس ، والتكميل ، المحصول اللغوي) والاختبارات غير اللفظية الأخرى . والعامل الأخير يجمع بين الاختبارات التي تشتمل على تكميل الناقص (أي ما يطلق عليه أحيانا ادراك المتعلقات Correlates ويمكن أن نسميه عامل الاستدلال (Reasoning) ويفصلها عن الاختبارات التي تتضمن الاستفادة من الذاكرة وهي المرادف والعكس والمحصول اللغوي وذاكرة الأعداد .

وواضح أن طريقة الجمع البسيط تقوم جميع خطواتها على أساس واحد هو قسمة حاصل جمع معاملات ارتباط الاختبار بالاختبارات الأخرى على الجذر التربيعي للمجموع الكلي لمعاملات الارتباط أي أن المعادلة الأساسية في الطريقة هي كما يأتي :



$$س_{خ} = \frac{مج\ ر_{أخ}}{\sqrt{مج\ ر}}$$

حيث س : درجة تشبع الاختبار (خ) بالعامل .

، $ر_{أخ}$: معامل الارتباط بين الاختبار (خ) والاختبار (أ)

مج $ر_{أخ}$: مجموع معاملات الارتباط بين الاختبار (خ) وجميع الاختبارات الأخرى .

، مج ر . مجموع معاملات الارتباط في الجدول الارتباطي .

ويقترح برت طريقة أخرى مؤسسة على التحليل بطريقة الجمع البسيط ويطلق على هذه الطريقة Method of Subdivided Factors ويمكن أن نسميها طريقـــة التقسيم المتزايد [1]

فهذا ينطبق على نمط التحليل الذي تؤدي اليه هذه الطريقة ، ونقطة الخلاف بين هذه الطريقة وطريقة الجمع البسيط تبدأ بعد استخراج العامل القطبي الأول ، حيث يقترح برت أن نقسم البواقي الى قسمين ، يحلل كل قسم منها على حدة على اعتبار أنه جدول منفصل ، وبذلك يكون نمط التشبعات كما هو مبين في الجدول الآتي وهو يمثل تحليلا فرضيا لثمانية اختبارات :

العوامل / الاختبارات	طريقة الجمع البسيط			طريقة التقسيم المتزايد			
	$س_م$	$س_{ق_1}$	$س_{ق_2}$	$س_م$	$س_{ق_1}$	$س_{ق_2}$	$س_{ق_3}$
١	+	+	—	+	+	—	
٢	+	+	—	+	+	—	
٣	+	+	+	+	+	+	
٤	+	+	+	+	+	+	
٥	+	—	—	+	—		—
٦	+	—	—	+	—		—
٦	+	—	+	+	—		+
٨	+	—	+	+	—		+

جدول (١١٥) نمط التشبعات في طريقتي الجمع البسيط والتقسيم المتزايد

والخطوات العملية لهذه الطريقة في المثال السابق الذي تم تحليله بطريقة الجمع البسيط تبدأ بخطوة ١٢ حيث يبدأ الخلاف بين الطريقتين ، فتكون خطوة (١٢) هي الاقتصار على الربع الأيمن العلوي وتحليله على حدة ، ثم على الربع الأيسر السفلي وتحليله على حدة

(١) استخدم بعض الاخصائيين في مصر تسمية أخرى « الانقسام بالطريقة الثنائية » أنظر الاحصاء في التربية وعلم النفس : الدكتور عبد العزيز القوصي - الدكتور حسن محمد حسين – الدكتور محمد خليفه بركات .

كذلك وتهمل البواقي في الربعين الآخرين ، ولذلك يشترط برت أن تطبق هذه الطريقة في حالات خاصة هي التي تكون غالبية البواقي في الربعين الأيمن العلوي والأيسر السفلي ذات دلالة احصائية بينما تقل أو تنعدم البواقي ذات الدلالة في الربعين الباقيين (١) .

الطريقة المركزية :

تبدأ الطريقة المركزية بنفس الخطوات التي اتبعت في طريقة الجمع البسيط ، وقد ذكرنا أن الفرق بين الطريقتين في هذه الخطوات أن بيرت يفضل ملء الخلايا القطرية بمعاملات تقديرية تعدل بعد نهاية التحليل حتى النهاية ، ولكن ثرستون يضع أكبر معامل أرتباط للاختبار في الجدول كقيمة تقديرية للخلايا القطرية ، على أن يتبع هذا الاجراء عند بدء كل تحليل للبواقي كذلك حيث يحذف الباقي في الخلية القطرية ويوضع بدله أكبر باقي في العامود .

والاختلاف الثاني هو أن ثرستون يصر على أن العوامل المركزية Centroid Factors لا يمكن تفسيرها نفسيا الا بعد ادارة المحاور Rotation of Axes وتحويل نمط التشبعات الى ما يسميه ثرستون التركيب البسيط Simple Structure (٢) . والخطوات العملية لعملية ادارة المحاور للحصول على التركيب البسيط يبدأ بالتشبعات الناتجة من التحليل المركزي . ويرى ثرستون أن التركيب البسيط يضمن وصول التحليل الى نتيجة ثابتة موحدة والشروط التي يضعها لهذا النمط هي :

١ – أن يحتوي كل صف في التحليل على تشبع صفري على الأقل .

٢ – أن يحتوي كل عامود في التحليل على عدد من التشبعات الصفرية يعادل عدد العوامل على الأقل .

٣ – اذا أخذنا أي عامود من أعمدة التشبعات ينبغي أن يكون بـه عدد مـن الاختبارات التي تتلاشى تشبعاتها بأحد العاملين فقط دون أن تتلاشى تشبعاتها بالعامل الآخر معادلا لعدد العوامل على الأقل .

وطريقة ادارة المحاور التي تتبع في هذا السبيل أن نختار أي عاملين ونعتبرهما محورين

---

(١) Burt, C., « Sub. Divided Factors » British Journal of Psychology Statistical Section III part 1.

(٢) Thurstone, L., Multiple Factor Analysis, 1947.

وتمثل الاختبارات بنقط على هذين المحورين ، وندير المحاور ليمر أحدهما بأكبر عدد من الاختبارات ، ومن الطبيعي أن تتغير التشبعات نتيجة هذه الادارة فتحتفظ بالتشبعات الجديدة للعامل الذي مر بالاختبارات ، ونأخذ العامل الثاني مع عامل جديد وهكذا بأخذ العوامل كل اثنين في محاولة نصل في النهاية الى نموذج التركيب البسيط السابق شرحه .

ومن المتبع عادة أن يقوم الباحث بمحاولات مبدئية ليقرر خطوات الادارة التي تضمن الوصول الى التركيب البسيط الذي يفي بالشروط الثلاثة السابقة ، علاوة على الوصول الى درجات تشبع موجبة لاختبارات القدرات العقلية .

واليك فيما يلي خطوات ادارة المحاور مبينة في مثال يتضمن ست اختبارات :

أولا : المصفوفة الارتباطية التي بدأ منها التحليل .

رقم الاختبار	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	—	٠,٥٢٥	٠,٠٠١	٠,٠٠١	٠,٤٤٨	٠,٠٠٢
٢		—	٠,٠٩٨	٠,٣٠٦	٠,٣٤٩	٠,٠٠١
٣			—	٠,١٣٣٠	٠,٣١٤	٠,٥٠٤
			—		٠,٠٠١	٠,٠٠١
						٠,٣٠٧
						٠ —

جدول (١١٦) مصفوفة ارتباطية

ثـــانيا :

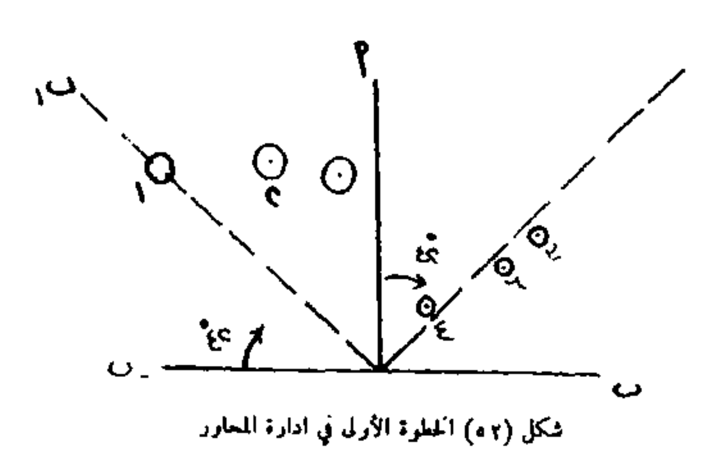
نتيجة التحليل المركزي :

رقم العامل رقــم الاختبار	أ	ب	جـ
١	٠,٥٤٢	٠,٦١٢	— ٠,٠٧٤
٢	٠,٦٢٩	٠,٣٤٣	— ٠,٣٤٨
٣	٠,٥٢٩	— ٠,٤٩٢	٠,١٩١
٤	٠,٢٨١	— ٠,١٨٢	— ٠,٥٥٠
٥	٠,٦٢٨	٠,١٤٣	٠,٢٧٤
٦	٠,٤٢٩	— ٠,٤٢٤	٠,٤٩٥

جدول (١١٧) تشبعات الاختبارات بالعوامل أ ، ب ، جـ

ثالثا : ادارة المحاور :

(أ) نقوم برسم مبدئي لموقع الاختبارات تبعا لتشبعاتها بكل عاملين ، فتقوم بعمل ثلاثة رسوم (أ مع ب) ، أ مع حـ ، (ب مع جـ) لنختار منها الرسم الذي نبدأ منه الادارة ، وقد وقع الاختيار في هذا المثال على الرسم الذي يكون فيه العاملان أ ، ب احداثيي الرسم . ونجد أن خير وضع تدار المحاور اليه هو الوضع الذي يمر فيه المحور أ بموضع الاختبارات ٤ ، ٣ ، ٦ تقريبا ، وذلك لأننا نلاحظ أن النقط التي تمثلها تكاد تقع على استقامة واحدة بين نقطة الأصل ، ولذا اختير هذا الوضع كمرحلة أول ، ويقتضي هذا ادارة المحاور في اتجاه العقرب حوالي ٤٢° الى الوضع الجديد الذي يأخذ فيه المحور الوضع أ١ ، والمحور ب الوضع ب١ . وفي هذين الوضعين تصبح تشبعات الاختبارات ٣ ، ٤ ، ٦ صفرا تقريبا ، هذا ويمكن قياس أبعاد النقط عن المحاور في الوضع الجديد من الشكل مباشرة ، وهذه تعطي بطبيعة الحال مقاييس تقريبية لدرجات التشبع الجديدة . ولكن يلزمنا طريقة حسابية دقيقة لذلك .



شكل (٥٢) الخطوة الأولى في ادارة المحاور

(ب) ذكرنا أن المحورين سيدوران في اتجاه عقرب الساعة بنحو ٤٢° ، وتبعا لقاعدة رياضية اذا كان بعدا نقطة عن نقطة الأصل (تقاطع المحورين) هما س ، ص حيث س هو البعد على المحور أ ، ص هو البعد على المحور ب فان البعدين على المحورين نفسيهما بعد ادارة المحورين ٤٢° في اتجاه عقرب الساعة يصبحان (س جتا ٤٢° — ص حا ٤٢°) ، (س حا ٤٢° + ص جتا ٤٢°) ومن جداول النسب المثلثية نجد أن :

حا ٤٢° = ٠,٦٦٩

، جتا ٤٢° = ٠,٧٤٣

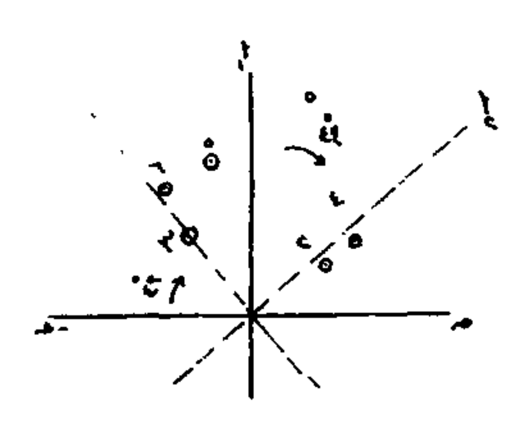
وعلى أساس هذين المقدارين نحول درجات التشبع الأصلية الى درجات التشبع الجديدة وتصبح الدرجات الجديدة كما يلي :

الاختبار	درجات التشبع الأصلية أ	درجات التشبع الأصلية ب	درجات التشبع الجديدة أ	درجات التشبع الجديدة ب
١	٠,٥٤٢	٠,٦١٢	– ٠,٠٠٧	٠,٨١٧
٢	٠,٦٢٩	٠,٣٤٢	٠,٢٣٩	٠,٦٧٥
٣	٠,٥٢٩	– ٠,٤٩٢	٠,٧٢٢	– ٠,٠,١٢
٤	٠,٢٨١	– ٠,١٨٢	٠,٢٣١	٠.٠٥٣
٥	٠,٦٢٨	٠,١٤٢	٠,٢٧١	٠,٥٢٦
٦	٠,٤٢٩	– ٠.٤٢٤	٠.٦٠٢	– ٠.٠٢٨
		عوامل الضرب	٠.٧٤٣	– ٠.٦٦٩ ($أ_١$)
			٠,٦٦٩	– ٠,٧٤٣ ($ب_١$)

ويمكن التأكد من صحة العمليات الحسابية من أن مجموع مربعي تشبعى كل اختبار بهذين العاملين يظل ثابتا لا يتغير مع ادارة المحاور .

ونظرا لأن التحليل الأصلي قد تم على ثلاثة عوامل فاننا نتطلب ثلاثة تشبعات صفرية في كل عامل حسب ما يتطلبه التركيب البسيط ، ونحن نلاحظ أن هذا قديتوفر في العامل $ب_١$ (اختبار ٣ = – ٠,٠١٢ ، اختبار ٤ = ٠,٠٥٣ واختبار ٦ = – ٠,٠٢٨) .

(ح) تشتمل الخطوة التالية على ادارة المحورين $أ_١$ مع ح . لذا نرسم مواضع الاختبارات أولا على هذين المحورين ، ولا يفوتنا اتخاذ الأبعاد الجديدة على المحور $أ_١$ بدلا من الأبعاد الأصلية .



شكل (٥٣) الخطوة الثانية في ادارة المحور

(د) ويتضح من الشكل أن خير وضع للمحاور الجديدة نحصل عليه من ادارة المحاور الأصلية في اتجاه عقرب الساعة بحوالي ٤٩° حيث يمر المحور حـ$_{1}$ بالاختبارات ١ ، ٣ ، ٦ تقريبا ويمر المحور أ$_{2}$ بالاختبارات ١ ، ٢ ، ٤ تقريبا .

ومن الجداول الرياضية نجد أن حا ٤٩° × ٠.٧٧٥

، حتا ٤٩° = ٠.٦٥٦

وبنفس طريقة الحساب السابقة نحصل على التشبعات الجديدة وهي كما يلي :

	درجات التشبع الأصلية		درجات التشبع الجديدة	
	أ$_{1}$	حـ	أ$_{2}$	حـ$_{1}$
١	− ٠,٠٠٧	− ٠,٠٧٤	− ٠,٠٦٠	٠,٠٤٣
٢	٠,٢٣٩	− ٠,٣٤٨	٠,٤٢٠	− ٠,٠٤٨
٣	٠,٧٢٢	٠,١٩١	٠,٣٢٩	٠,٦٧٠
٤	٠,٣٣١	− ٠,٥٥٠	٠,٦٣٢	٠,١١١
٥	٠,٣٧١	٠,٢٧٤	٠,٠٣٧	٠,٤٦٠
٦	٠,٦٠٢	٠,٣٩٥	٠,١٢٤	٠,٦٩٠

(هـ) وبذلك تصبح النتيجة النهائية كالآتي :

العوامل / الاختبارات	قبل ادارة المحاور				بعد ادارة المحاور			
	أ	ب	جـ	مجـ س٢	أ ٢	ب ١	جـ ١	مجـ س٢
١	٠,٥٤٢	٠,٦١٢	٠,٠٧٤	٠,٦٧٤	٠,٠٦٠ —	٠,٨١٧	٠,٠٤٣	٠,٦٧٣
٢	٠,٦٢٩	٠,٣٤٢	٠,٣٤٨ —	٠,٦٣٤	٠,٤٢٠	٠,٦٧٥	٠,٠٤٨ —	٠,٦٣٤
٣	٠,٥٧٩	٠,٤٩٢ —	٠,١٩١	٠,٥٥٨	٠,٣٢٩	٠,٠١٢ —	٠,٦٧٠	٠,٥٥٧
٤	٠,٢٨١	٠,١٨٢ —	٠,٥٥٠ —	٠,٤١٥	٠,٦٣٢	٠,٠٥٣	٠,١١١ —	٠,٤١٥
٥	٠,٦٢٨	٠,١٤٣	٠,٢٧٠	٠,٤٩٠	٠,٠٣٧	٠,٥٢٦	٠,٤٦٠	٠,٤٩٠
٦	٠,٤٠٩	٠,٤٢٤ —	٠,٣٥٩	٠,٤٩٣	٠,١٢٤	٠,٠٢٨ —	٠,٦٩٠	٠,٤٩٢

جدول (١١٨) درجات التشبع بعد ادارة المحاور

ويلاحظ أن نمط درجات التشبع قد قرب كثيرا من النمط النموذجي الذي تتطلبه مستلزمات « التركيب البسيط » واذا أريد الوصول الى نموذج أقرب يمكن اجراء خطوات أخرى للادارة .

طريقة العوامل الطائفية [1] :

تقوم طريقة العوامل الطائفية على فكرة نظرية هي أن أية عملية عقلية يمكن أن نحللها الى عامل عام تشترك فيه مع باقي العمليات ثم عامل طائفي تشترك فيه مع عدد من العمليات الأخرى ، فهي تطبيق مباشر لنظرية العوامل الثلاثة التي سبق توضيحها ،

(١) Burt, C. British Journal of Psychology (Statical Section) III, part 1.

ويختلف الأساس العملي في هذه الطريقة عنه في طريقة الجمع البسيط أو الطريقة المركزيةفي أن العامل العام الذي يستخرج في هاتين الطريقتين يقوم مقام مركز الثقل بالنسبة لكتلةالجسم . بحيث تتوزع قيم البواقي بعد استخراجه والتخلص منه فيكون نصفها سالبا

	أ				ب				حـ			
رقم الاختبار	١	٢	٣	المجموع	٤	٥	٦	المجموع	٧	٨	٩	لمجموع
١	—	٠,٧٥	٠.٦٥		,٥٤	.٤٥	.٣٦	١.٣٥	.٢٧	.١٨	.٠٩	.٥٤
٢	.٧٥	—	.٦٣		,٤٨	.٤٠	.٣٢	١.٢٠	.٢٤	.٠٦	.٠٨	.٤٨
٣	,٦٥	.٦٣	—		.٤٢	.٣٥	.٢٨	١.٠٥	.٢١	.١٤	.٠٧	.٤٢
المجموع					.٤٤	.٢٠	.٩٦	٣٦٠	.٧٢	.٤٨	.٢٤	١.٤٤
٤	,٥٤	.١٨	.٤٢	١.٤٤	—	.٤٢	.٣٠		.١٨	.١٢	.٠٦	.٣٦
٥	.٤٥	.٤٠	.٣٥	٢٠	.٤٢	—	.٢٨		١٥	.١٠	.٠٥	.٥٠
٦	.٣٦	.٣٢	٣٨	٩٦	.٣٠	٢٨	—		.١٢	٠٨	.٠٤	.٢٤
المجموع	.٣٥	.٢٠	٠٥	٣٦٠								
٧	,٢٧	.٢٤	.٢١	٧٢	.١٨	.١٥	.١٢		—	.١٨	.٢٧	
٨	.١٨	.١٦	١٤	,٤٨	,١٢	,١٠	.٠٨		.١٨	—	.١٠	
٩	,٠٩	.٠٧	.٠٧	.٢٤	.٠٦	.٠٥	.٠٤		.٢٧	.١٠	—	
المجموع	,٥٤	,١٨	.٤٢	.٤٤	,٣٦	,٣٠	,٣٤	,٩٠				

المجموع الكلي	,٥٤	,٤٨	,٤٢		١,٨٠	١,٥٠	١,٢٠	.	١,١٧	,٧٨	,٣٩	
القاسم		٢,١				٣,٠				٣,٩		
درجات	,٩٠	,٨٠	,٧٠		,٦٠	٥,٥٠	,٤٠		,٣٠	,٢٠	,١٠	

جدول (١١٩) حساب درجات التشبع بالعامل الأساسي

والنصف الآخر موجبا . ولكن العامل العام الذي يستخرج في طريقة العوامل الطائفية يترك وراءه بواقي موجبه في اختبارات المجموعة الواحدة وصفرا في اختبارات المجموعات المختلفة ، ولذلك يفضل برت أن يسمي هذه العوامل اسما يختلف عن العامل العام فيطلق عليه « العامل الأساسي » .

والخطوات العملية في هذه الطريقة تتضح من تحليل المثال السابق [١] :

ويمكن تبسيط خطوات الطريقة اذا رمزنا للجدول الأصلي ولمعاملات ارتباط بالشكل الآتي :

---

(١) هذا المثال مقتبس من Burt, C., The Factors of The Mind, 1940.

	أ	ب	ح
أ	أأ	أب	أح
ب	ب أ	ب ب	ب ح
ح	ح أ	ح ب	ح ح

أي أنه يمكن تمييز ثلاث مجموعات في الجدول الارتباطي والذي يدلنا على ذلك منذ البداية أن معاملات الارتباط في المربعات الثلاثة القطرية الموضحة في الجدول تكون أعلى على وجه العموم عما يتوقع لها على أساس الترتيب الهيراركي الذي تنخفض فيه المعاملات كلما اتجهت الى أسفل أو الى اليسار وتنحصر خطوات التحليل فيما يأتي :

١ ـ رتب معاملات الجدول الارتباطي الأصلي ترتيبا تنازليا بقدر الامكان ، حتى يتضح نمط التقسيم الى مجموعات . مستدلا عليها بالدليل الذي وضحناه .

٢ ـ أوجد حواصل جمع أعمدة وصفوف كل مجموعة . كما هو مبين في الجدول واستنتج في النهاية المجموع الكلي للأعمدة (١,٨٩ ، ١,٦٨ ، ١,٤٧ ....)

٣ ـ المعاملات في المربعات القطرية تتكون من عوامل أخرى مضافة الى العامل الأساسي بناء على الفكرة الأساسية في الطريقة . وأما ما عداها من المعاملات في المربعات الأخرى فهي راجعة الى العامل الأساسي وحده . ولذا نقتصر في حساب درجات التشبع بهذا العامل على هذه المربعات .

٤ ـ وطريقة حساب معاملات التشبع بهذا العامل الأساسي حسب هذه الطريقة يقتضي حساب قاسم لمجموعات أعمدة كل مجموعة (مع حذف معاملات المربعات القطرية) .

والقانون الذي نحسب به هذا القاسم للمجموعة الأولى هو :

$$\sqrt{\text{مج ر}_{٢٠٣}}\ \left\{ \frac{\text{مج ر}_{١٠٢}}{\text{مج ر}_{١٠٣}} + \frac{\text{مج ر}_{١٠٣}}{\text{مج ر}_{١٠٢}} \right\}$$

أي يساوي في هذا المثال .

$$٠,٢١ = \left\{ \sqrt{\frac{١,٤٤}{٣,٦٠}} + \sqrt{\frac{٣,٦٠}{١,٤٤}} \right\} \sqrt{٩٠}$$

والقاسم للمجموعة الثانية هو :

$$\left\{ \frac{\text{مح ر}_{٢٠٣}}{\text{مح ر}_{٢٠١}} + \sqrt{\frac{\text{مح ر}_{٢٠١}}{\text{مح ر}_{٣٠١}}} \right\} \sqrt{\text{مح ر}_{١٠٣}}$$

وللمجموعة الثالثة :

$$\left\{ \sqrt{\frac{\text{مح ر}_{٣٠٢}}{\text{مح ر}_{٢٠١}} + \frac{\text{مح ر}_{٣٠١}}{\text{مح ر}_{٣٠٢}}} \right\} \sqrt{\text{مح ر}_{٢٠١}}$$

٥ — اقسم كل عامود على قاسم المجموعة التي ينتمي اليها لتحصل على درجات التشبع بالعامل الأساسي = (١,٨٩ ÷ ٠,٢١ = ٩٠, ٠٠٠٠٠ ، ١,٨٠ ÷ ٣,٠ = ٠,٦) .

حساب درجات التشبع بالعوامل الطائفية :

٦ — كون جدولا نظريا لمعاملات الارتباط المتوقعة على أساس درجات التشبع بالعامل الأساسي [1] ثم اطرح خلايا هذا الجدول من خلايا الجدول الأصلي لمعاملات الارتباط لتحصل على جدول البقايا بعد العامل الأساسي . واذا كانت هذه الطريقة مناسبة للتحليل فان البواقي بعد العامل الأساسي خارج المربعات القطرية تكون عديمة الدلالة الاحصائية . ونظرا لأن المثال الحالي مثال فرضي فاننا سنجد أن البواقي خارج المربعات القطرية معدومة تماما ، وتنحصر جميع البواقي في المربعات القطرية . واليك فيما يلي هذه البواقي بعد استخراج العامل الأساسي .

---

(١) نترك الطالب تكوين هذا الجدول .

رقم الاختبار	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١	( )	.٠٣	.٠٢	—	—	—	—	—	—
٢	,٠٣	( )	,٠٦	—	—	—	—	—	—
٣	.٠٢	.٠٦	( )	—	—	—	—	—	—
٤	—	—	—	( )	.١٢	.٠٦	—	—	—
٥	—	—	—	.١٢	( )	.٠٨	—	—	—
٦	—	—	—	.٠٦	.٠٨	( )	—	—	—
٧	—	—	—	—	-	-	( )	,١٢	,٢٤
٨	—	—	—	—	—	—	.١٢	( )	,٠٨
٩	—	—	—	—	—	-	.٢٤	.٠٨	( )

جدول (١٢٠) البواقي بعد العامل الأساسي

٧ – خذ البواقي في كل مربع من المربعات القطرية على حدة وحلله بالطريقة العادية «المركزية أو الجمع البسيط» مع وضع تقديرات مناسبة للخلايا القطرية تحصل على النتيجة النهائية الآتية :

العامل / الاختبار	الأساس	الطائفي (١)	الطائفي (٢)	الطائفي (٣)
١	٠,٩٠	٠,١٠	—	—
٢	٠,٨٠	٠,٣٠	—	—
٣	٠,٧٠	٠,١٠	—	—
٤	٠,٦٠	—	٠,٣٠	—
٥	٠,٥٠	—	٠,٤٠	—
٦	٠,٤٠	—	٠,٢٠	—
٧	٠,٣٠	—	—	٠,٦٠
٨	٠,٢٠	—	—	٠,٢٠
٩	٠,١٠	—	—	٠,٤٠

جدول (١٢١) نتيجة التحليل بطريقة العوامل الطائفية

طريقة العوامل الجمعية[1] : Bi-Factor Method

تشبه طريقة العوامل الجمعية كثيرا طريقة برت للعوامل الطائفية . فهي تقوم أيضا على أساس أن المعاملات خارج المربعات القطرية هي التي تحلل أولا لاستخراج درجات التشبع بالعامل الأساسي ، ثم تحلل البواقي في المربعات القطرية للحصول على درجات التشبع بالعوامل الطائفية .

والمعادلة الأساسية التي تستخدم في حساب درجات التشبع في هذه الطريقة مؤسسة على أن درجة تشبع أي اختبار (س مثلا) بالعامل الأساسي (م) يمكن استخراجه مـــن معاملات الارتباط بينه وبين أي اختبارين (ص ، ع مثلا) يشتركان معه في هذا العامل الأساسي .

$$ر^2_{سم} = \frac{ر_{سص} \; ر_{سع}}{ر_{صع}}$$

وفي حالة الجدول المحتوي على عدد كبير من المتغيرات مقسمة الى مجموعات كما هو الحال في المثال الأخير (جدول ١٦٤) يمكن أن نرمز لمجموع معاملات الارتباط في المربعات بالرموز الآتية :

(أ)	ء	هـ
ء	(ب)	و
هـ	و	(جـ)

وتكون درجة تشبع أي اختبار في المجموعة (أ) ولكن اختبار س كما هي في المعادلة الآتيـــة :

$$ر^2_{سم} = \frac{ء_س \; هـ_س}{و}$$

حيث ء$_س$ ، هـ$_س$ = مجموع معاملات ارتباط الاختبار س في المربعات ء ، هـ .

، و ـــ المجموع الكلي لمعاملات المربع و

ولنأخذ اختبار (أ) في المجموعة الأولى من الجدول (١٦٤) .

$$ر^2_{أ١} = \frac{١,٣٥ \times ٠,٥٤}{٠,٩٠}$$

$$\therefore\ ر_{١٠م} = ٠.٩$$

و $ر_{هـم}$ = (في المجموعة الثانية) يمكن استنتاجه من :

$$ر^{٢}_{هـم} = \frac{٠.٣٠ \times ١.٢٠}{١.٤٤}$$

$$\therefore\ ر_{هـم} = ٠.٥$$ وهكذا .

وبذلك يتسنى لنا حساب معاملات التشبع بالعامل الأساسي . ونرى أنها مطابقة تماما لما في طريقة برت . وننتقل بعد ذلك الى حساب البواقي في المربعات القطرية ثم تحليل هذه البواقي . ويتبع هولزنجر نفس الطريقة السابقة في ذلك .

فاذا رجعنا الى جدول البواقي بعد العامل الأساسي في المثال السابق (جدول ١٦٥) وان درجة تشبع اختبار (أ) بالعامل الطائفي يمكن حسابه من :

$$ر^{٢}_{١٠ط} = \frac{٠,٠٢ \times ٠,٠٣}{٠,٠٦}$$

$$\therefore\ ر_{١٠ط} = ٠,١$$

، درجة تشبع اختبار (٨) بالعامل الطائفي للمجموعة الثالثة يمكن حسابه من :

$$ر^{٢}_{٨٠ط٣} = \frac{٠,٠٨ \times ٠,١٢}{٠,٢٤}$$

$$\therefore\ ر_{٨٠ط٣} = ٠,٢$$

وهكذا نصل الى نفس النتائج في التحليل التي توصلنا اليها بطريقة برت للعوامل الطائفيـــة .

خاتمـــة :

بالرغم من الوقت القصير نسبيا الذي مر منذ أول محاولة للتحليل العاملي الا أن التقدم الذي أحرزه هذا الفرع من التحليل يعد كبيرا للغاية ، فقد اكتشفت طرق عديدة لهذا النوع من التحليل ولم نذكر منها الا بعضها في هذا الباب . كما أن استخدام التحليل العاملي قد زاد عن نطاق الهدف الذي بدأ به – وهو القدرات العقلية في سائر نواحي البحوث

النفسية والاجتماعية ــ فقد تدخل في بحوث الشخصية وسماتها وأنماطها لدرجة كبيرة ، وأصبح أداة يعتمد عليها كثير من الباحثين الاجتماعيين كذلك في مقاييس الرأي العام والاتجاهات وغيرها . الا أننا يجب ألا نساق في ذكر ما لهذا الفرع من مزايا فننسى الحدود التي يجب أن نأخذها في الاعتبار عند استخدامه .

وأهم هذه الحدود ما يأتي :

١ ــ نتائج التحليل الاحصائية ثم تفسيرها تفسيرا فنيا يتوقف كلية على المتغيرات التي شملها البحث ، بمعنى أن العامل العام الذي يظهر في بطارية من الاختبارات يختلف في طبيعته وتفسيره عن العامل العام الذي يظهر في بطارية أخرى ، فهذا يتوقف على نوع العمليات العقلية التي تتكون منها البطارية .

٢ ــ النتائج الاحصائية للتحليل تتوقف على العينة التي تطبق عليها المقاييس فالعامل الذي يفسر على أنه ذكاء عام في عينة من الأطفال قد يفسر على أنها عامل السرعة اذا طبق نفس الاختبار على الكبار .

٣ ــ وزيادة على ذلك فان النتائج تتوقف كذلك الى حد كبير على المادة التي تصاغ فيها مقاييس العمليات العقلية ، سواء كانت المادة ألفاظا أو صورا أو أعدادا أو أداء Performance فكما أن البحوث قد ميزت بين العوامل التي تتوقف على الوظائف العقلية (الاستدلال والتذكر ....) فقد ميزت أيضا بين العوامل التي تتوقف على المادة التي تصاغ فيها هذه الوظائف .

٤ ــ وأخيرا فان طريقة التحليل لا تنجح الا اذا كانت مؤسسه على اختيار ناجح للبطارية التي تحلل . فتحليل أي جدول ارتباطي بطريقة التحليل العاملي كثيرا ما يؤدي الى نتائج لا معنى ولا قيمة لها . ويحتاج هذا الى البدء بفرض يتضمن العوامل التي يحتمل ايجادها في التحليل [1] ويجمع الباحث لذلك من الاختبارات في البطارية مما قد يحقق له الفرض أو يرفضه .

ولهذا فان خطة استخدام طريقة التحليل العاملي ينبغي أن تسير في الخطوات الآتية :

---

(١) ويعترض الكثيرون على طريقة التحليل العاملي اعتراضاً يبدو وجيهاً « أن الباحث يجد في النهاية العوامل التي أعدها قبل التحليل » والواقع أن هذا الاعتراض مردود عليه . فالتحليل العاملي كأي طريقة علمية لا بد أن يبدأ بفرض قد يظهر التحليل في النهاية خطأه وبعده عن الحقيقة .

١ — احترم صلاحية الطريقة للبحث فلا تصلح طريقة التحليل العاملي لتحقيق أي فرض أو حل أية مشكلة ، بل تتوقف صلاحيتها على اختيار المجال المناسب .

٢ — ابدأ بفرض يتعلق بالعوامل المحتملة التي قد تنتج من التحليل .

٣ — وتبعا لهذا الفرض تخير عددا كافيا من المقاييس أو الاختبارات (ومن المتفق عليه أن العامل الواحد لا يتحدد الا بثلاثة اختبارات أو مقاييس) .

٤ — حدد المجتمع الذي تأخذ منه العينة ، واختيار المجتمع يتطلب النظر الى عدة نواحي تتوقف على طبيعة البحث الذي تقوم به .

٥ — حدد طريقة اختيار العينة وعدد أفرادها بالتقريب . وينبغي أن يكون هذا العدد مناسبا حتى تكون النتائج في الخطوات المختلفة للتحليل ذات دلالة احصائية يمكن الاعتماد عليهـــا .

٦ — بعد حساب معاملات الارتباط . وهي الخطوة الأساسية في التحليل العاملي ، تخير الطريقة التي تستخدمها في التحليل فليست كل طريقة صالحة لتحليل أي جدول ارتباطي كما أسلفنا .

٧ — ويصر الكثيرون كما سبق أن ذكرنا ألا تتخذ نتائج التحليل الأولي ، بل يفضلون ادارة المحاور لتنقية العوامل الناتجة وتوضيح الصورة الأخيرة بقدر الامكان .

٨ — وأخيرا فنتيجة التحليل ليس من السهل تعميمها بل يحتاج هذا التعميم الى بحوث كثيرة في ظروف مختلفة مما لا يتسنى لباحث واحد القيام به عادة .

أسئلة على الباب السـابع

١ ـ اشرح المقصود من طريقة التحليل العاملي مبينا أهم مزاياه وحدوده كطريقة من طرق تحقيق الفروض العلمية .

٢ ـ « يعتبر سبيرمان مؤسس مدرسة التحليل العاملي » ناقش هذه العبارة مبينا الخدمات التي قدمها سبيرمان لهذه الطريقة العلمية .

٣ ـ قارن مع التمثيل بين النظريات المختلفة التي وضعت لوصف العلاقة بين العمليات العقلية المختلفة . ثم وضح كيف يمكن التوفيق بين وجهات النظر المختلفة فيها .

٤ ـ اشرح مع التمثيل ما تفهمه مما يأتي :

١ ـ الترتيب الهيراركي .

٢ ـ المعادلة الرباعية .

٣ ـ ادارة المحـاور .

٥ ـ المصفوفة الارتباطية الآتية تبين العلاقة بين تسعة اختبارات . استخدم الطريقة المركزية في تحليلها (يكتفي بثلاثة عوامل : واحد عام واثنان قطبيان) .

القطبية	١ المناسبات الأرقام	٢ سلاسل الاشكال	٣ ذاكرة الأمثال	٤ فهم اللفظ	٥ الاستدلال الاشكال	٦ سلاسل الأرقام	٧ ذاكرة الأشكال	٨ ادراك	٩ عمليات حسابية
١	—	,١٢	,١٥	,٦٤	,٧١	.١٣	,١٧	.٢٨	,١٤
٢		—	,٣٧	,١٩	,١٥	,٥٠	,٧٢	,٢٥	,٨٠
٣			—	,١٠	,١٦	,٦٦	.٤٠	.٧٥	,٤٢
٤				—	,٥٥	,٢٠	.١١	,١٣	,١٦
٥					—	,١٦	.١٣	,١٨	,٤٢
٦						—	,٤٥	,٨٠	,٤٢
٧							—	,٤٩	,٧٨
٨								—	,٣٥
٩									—

جدول (١٢٢) مصفوفة ارتباطية لستة اختبارات

ثم استنتج من هذا التحليل طبيعة العوامل التي تفسر هذه المعاملات .

٦ — اختبر البواقي بعد العامل الطائفي الأول لتحديد ما اذا كانت تصلح للتحليل بطريقة التقسيم المتزايد Sub-Divided Factors . وطبق هذه الطريقة في حالة صلاحية البواقي لذلك.

٧ — ما المقصود من المفهوم « التركيب البسيط » الذي يهدف ثرستون الى الوصول اليه في التحليل وما شروطه ؟ الى أي حد تعتبر نمط التشبعات في طريقة العوامل الطائفية مستوفية لهذه الشروط ؟ .

٨ — حاول ادارة المحاور في التحليل الذي حصلت عليه في السؤال الخامس بطريقة الرسم لتقترب بقدر الامكان الى التركيب البسيط . مبينا رأيك في هذه الطريقة كوسيلة علمية للوصول الى نتائج موحدة ثابتة Unique .

٩ — اختر أي طريقة من طرق التحليل الى العوامل الطائفية وطبقها على جدول (١٢٥) ثم اشرح طبيعة العوامل التي تصل اليها من هذا التحليل .

١٠ — اشرح مثالين تستطيع أن تستخدم فيهما طريقة التحليل العاملي في البحوث الاجتماعية ، موضحا في أحدهما بالتفصيل الخطوات التي تسير عليها حتى تصل الى حل المشكلة الاجتماعية التي تبحثها .

فهرست الكتاب

الموضوع		الصفحة

الموضوع		الصفحة

الموضوع		الصفحة

رقم الإيداع	٩٦/١٠٢٩٨
الترقيم الدولى I. S. B. N	977 / 10 / 0907 /9



